

Dwustosunek.

1. Przy ustalonych położeniach trzech różnych punktów A, B, C na prostej ℓ dwustosunek $(ABCD)$ jest różnowartościową funkcją punktu D poruszającego się po ℓ . Jaki jest zbiór wartości tej funkcji? Jaka jest jej wartość dla $D = A$? $D = B$? $D = C$?
2. Udowodnij, że jeśli $(ABCD) = (BACD)$, to wspólna wartość tych dwóch dwustosunków wynosi -1 . (Zakładamy, że A, B, C, D są parami różne i leżą na prostej.)
3. (Czworokąt a harmonicznosc, raz jeszcze.) Niech $XYWZ$ będzie czworokątem i niech $A = XY \cdot WZ$, $B = XZ \cdot YW$, $\ell = AB$, $C = XW \cdot \ell$, $D = YZ \cdot \ell$. Dwoma rzutami centralnymi przeprowadź uporządkowaną czwórkę (A, B, C, D) na uporządkowaną czwórkę (B, A, C, D) . Wywnioskuj, że $(ABCD) = -1$.
4. Punkty A, B, M leżą na prostej ℓ , zaś ∞ to punkt w nieskończoności tej prostej. Udowodnij, że M jest środkiem odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy $(ABM\infty) = -1$.
5. Mając daną prostą i równoległy do niej (ale nieleżący na niej) odcinek skonstruuj środek tego odcinka – używając samej linijki.
6. (Motylek) Niech O będzie środkiem cięciwy AB okręgu S . Niech MN oraz PQ będą cięciami S przechodzącymi przez O , przy czym punkty P i N leżą po tej samej stronie AB . Niech E i F będą punktami przecięcia AB z cięciami MP i NQ odpowiednio. Udowodnij, że O jest środkiem odcinka EF .
Wsk. $(AEOB) = (BFOA)$. Rzutuj z M na S , potem z Q na AB .
7. (Pappus) Jeśli A, B, C są współliniowe i A', B', C' są współliniowe, to $C'' = AB' \cdot BA'$, $B'' = AC' \cdot CA'$ i $A'' = BC' \cdot CB'$ też są współliniowe.
Wsk. Jeśli nie, to niech $B''' = A''C'' \cdot CA'$. Niech też $O = AB \cdot A'B'$, $D = AB' \cdot CA'$, $E = BA' \cdot CB'$. Uzasadnij, że $(A'DB''C) = (A'DB'''C)$, posiłkując się czwórkami (A', B', C', O) i (E, B', A'', C) .
8. (Pascal) Jeśli A, B, C, A', B', C' leżą na okręgu, to $C'' = AB' \cdot BA'$, $B'' = AC' \cdot CA'$ i $A'' = BC' \cdot CB'$ są współliniowe.
Wsk. Możliwie wiernie naśladowuj dowód z poprzedniego zadania.
9. Okrag wpisany w trójkąt ABC jest styczny do AB, BC, CA w punktach F, D, E odpowiednio. Z tw. Cevy łatwo wynika, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
 - a) Niech $P = BC \cdot EF$. Udowodnij, że $(BCDP) = -1$.
 - b) Załóżmy, że okrag wpisany w trójkąt $A'BC$ jest styczny do $A'B, BC, CA'$ w punktach F', D, E' odpowiednio. Uzasadnij, że proste $EF, E'F'$ i BC przecinają się w jednym punkcie.
10. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P , a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q . Dowieść, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

Wsk. Dwustosunek prostych AB, AP, AD, AQ jest taki sam jak prostych CB, CP, CD, CQ . Kroimy te pęki z BQ i DQ odpowiednio. Uzyskane czwórki są perspektywiczne.

11. Na boku AB czworokąta $ABCD$ wybrano punkt M_1 . Niech $M_2 = M_1D \cdot BC$, $M_3 = M_2A \cdot CD$, $M_4 = M_3B \cdot DA$, $M_5 = M_4C \cdot AB$ etc. Udowodnij, że $M_{13} = M_1$.

Wsk. A, B i $AB \cdot CD$ wracają na miejsce.

12. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC . Wybrano dowolny punkt P na odcinku AD . Proste BP, CP przecinają boki AC, AB w punktach M, N odpowiednio. Prosta MN przecina AD w punkcie Q . Wybrano dowolny punkt F na boku AC . Prosta FQ przecina prostą CN w E . Udowodnij, że $\angle FDA = \angle EDA$.

Wsk. dwustosunek i rzuty centralne.

Wyrzucanie do nieskończoności.

13. (Pappus) Jeśli A, B, C są współliniowe i A', B', C' są współliniowe, to $C'' = AB' \cdot BA'$, $A'' = BC' \cdot CB'$ i $B'' = CA' \cdot AC'$ też są współliniowe.

Wsk. Wyrzucić C'' i A'' do nieskończoności. Albo A', B' i C' .

14. Rozważmy czworokąty $ABCD$ których boki AB i CD leżą na zadanych prostych ℓ_1 i ℓ_2 , a boki BC i AD przecinają się w punkcie P . Zbiór punktów przecięcia przekątnych takich czworokątów jest prostą, na której leży punkt $\ell_1 \cdot \ell_2$. (Jeśli odcinki nie chcą się przecinać, przedłużamy je do prostych – wtedy na pewno się przetną.)

15. Niech $ABCD$ będzie czworokątem, $P = AB \cdot CD$, $Q = AD \cdot BC$, $R = AC \cdot BD$, $K = QR \cdot AB$, $L = QR \cdot CD$, $M = PR \cdot BC$, $N = PR \cdot AD$, $S = KN \cdot ML$ (brzmi koszmarnie; ale zrób rysunek). Wtedy P, Q, S są współliniowe.

16. Uzasadnij, że dowolny czworokąt (leżący na pewnej płaszczyźnie w przestrzeni) można przekształcić złożeniem rzutów centralnych (i ewentualnie równoległych) na kwadrat (być może leżący w innej płaszczyźnie).

Okrąg.

17. Niech styczne w B i w C do okręgu o opisanego na trójkącie ABC przecinają się w D . Niech też $AD \cdot BC = P$, zaś Q niech będzie różnym od A punktem przecięcia AD i o . Uzasadnij, że $(AQBC) = -1$; wywnioskuj, że $(AQPD) = -1$.

Wsk. $\frac{AB}{QB} = \frac{AD}{DB}$.

18. Styczne w B i w C do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecinają się w D . Niech M będzie środkiem cięciwy BC , zaś N środkiem łuku BC okręgu opisanego. Udowodnij, że $\angle NAM = \angle NAD$.

Wsk. $\angle NMD$ jest czwórką harmoniczną.

19. Okręgi o_1 i o_2 , styczne do pewnej prostej odpowiednio w punktach A i B , przecinają się w punktach X i Y , przy czym punkt X leży bliżej prostej AB niż punkt Y . Prosta AX przecina okrąg o_2 w punkcie P różnym od X . Styczna do okręgu o_2 w punkcie P przecina prostą AB w punkcie Q . Wykazać, że $\angle XYZ = \angle BYQ$.

Wsk. Pokaż, że $M = XY \cdot AB$ jest środkiem AB . Niech o_2 przecina QY w Y i w Z . Zauważ, że $(YZBP) = -1$. Zrzutuj tę czwórkę na prostą AB .