Dwustosunek.

1. Przy ustalonych położeniach trzech różnych punktów A, B, C na prostej ℓ dwustosunek $(ABCD)$ jest różnowartościową funkcją punktu D poruszającego się po ℓ. Jaki jest zbiór wartości tej funkcji? Jaka jest jej wartość dla $D = A$? $D = B$? $D = C$?
2. Udowodnij, że jeśli $(ABCD) = (BACD)$, to wspólna wartość tych dwóch dwustosunków wynosi -1. (Zakładamy, że A, B, C, D są parami różne i leżą na prostej.)
3. (Czworokąt a harmoniczność, raz jeszcze.) Niech $XYWZ$ będzie czworokątem i niech $A = XY \cdot WZ$, $B = XZ \cdot YW$, $\ell = AB$, $C = XW \cdot \ell$, $D = YZ \cdot \ell$. Dwoma rzutami centralnymi przeprowadź uporządkowaną czwórkę (A, B, C, D) na uporządkowaną czwórkę (B, A, C, D). Wywnioskuj, że $(ABCD) = -1$.
4. Punkty A, B, M leżą na prostej ℓ, zaś ∞ to punkt w nieskończoności tej prostej. Udowodnij, że M jest środkiem odcinak AB wtedy i tylko wtedy, gdy $(ABM\infty) = -1$.
5. Mając daną prostą i równoległy do niej (ale nieleżący na niej) odcinek skonstruuj środek tego odcinka – używając samej linijki.
6. (Motylek) Niech O będzie środkiem cięciwy AB okręgu S. Niech MN oraz PQ będą cięciwami S przechodzącymi przez O, przy czym punkty P i N leżą po tej samej stronie AB. Niech E i F będą punktami przecięcia AB z cięciwami MP i NQ odpowiednio. Udowodnij, że O jest środkiem odcinka EF.
7. (Pappus) Jeśli A, B, C są współliniowe i A', B', C' są współliniowe, to $C'' = AB' \cdot BA'$, $B'' = AC' \cdot CA'$ i $A'' = BC' \cdot CB'$ też są współliniowe.
8. (Pascal) Jeśli A, B, C, A', B', C' leżą na okręgu, to $C'' = AB' \cdot BA'$, $B'' = AC' \cdot CA'$ i $A'' = BC' \cdot CB'$ są współliniowe.
9. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do AB, BC, CA w punktach F, D, E odpowiednio. Z tw. Cevy łatwo wynika, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
   a) Niech $P = BC \cdot EF$. Udowodnij, że $(BCDP) = -1$.
   b) Załóżmy, że okrąg wpisany w trójkąt $A'BC$ jest styczny do $A'B$, BC, CA' w punktach F', D, E' odpowiednio. Uzasadnij, że proste EF, $E'F'$ i BC przecinają się w jednym punkcie.
10. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P, a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.
11. Na boku AB czworokąta $ABCD$ wybrano punkt M_1. Niech $M_2 = M_1D \cdot BC$, $M_3 = M_2A \cdot CD$, $M_4 = M_3B \cdot DA$, $M_5 = M_4C \cdot AB$ etc. Udowodnij, że $M_{13} = M_1$.
12. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC. Wybrano dowolny punkt P na odcinku AD. Proste BP, CP przecinają boki AC, AB w punktach M, N odpowiednio. Prosta MN przecina AD w punkcie Q. Wybrano dowolny punkt F na boku AC. Prosta FQ przecina prostą CN w E. Udowodnij, że $\angle FDA = \angle EDA$.

Wyrzucanie do nieskończoności.

13. (Pappus) Jeśli A, B, C są współliniowe i A', B', C' są współliniowe, to $C'' = AB' \cdot BA'$, $A'' = BC' \cdot CB'$ i $B'' = CA' \cdot AC'$ też są współliniowe.

14. Rozważmy czworokąty $ABCD$ których boki AB i CD leżą na zadanych prostych ℓ_1 i ℓ_2, a boki BC i AD przecinają się w punkcie P. Zbiór punktów przecięcia przekątnych takich czworokątów jest prostą, na której leży punkt $\ell_1 \cdot \ell_2$. (Jeśli odcinki nie chcą się przecinać, przedłużamy je do prostych – wtedy na pewno się przetną.)

15. Niech $ABCD$ będzie czworokątem, $P = AB \cdot CD$, $Q = AD \cdot BC$, $R = AC \cdot BD$, $K = QR \cdot AB$, $L = QR \cdot CD$, $M = PR \cdot BC$, $N = PR \cdot AD$, $S = KN \cdot ML$ (brzmi koszmarnie; ale zrób rysunek). Wtedy P, Q, S są współliniowe.

16. Uzasadnij, że dowolny czworokąt (leżący na pewnej płaszczyźnie w przestrzeni) można przekształcić złożeniem rzutów centralnych (i ewentualnie równoległych) na kwadrat (być może leżący w innej płaszczyźnie).

Okrąg.

17. Niech styczne w B i w C do okręgu o opisanego na trójkącie ABC przecinają się w D. Niech też $AD \cdot BC = P$, zaś Q niech będzie różnym od A punktem przecięcia AD i o. Uzasadnij, że $(AQBC) = -1$; wywnioskuj, że $(AQPD) = -1$.

18. Styczne w B i w C do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecinają się w D. Niech M będzie środkiem cięciwy BC, zaś N środkiem łuku BC okręgu opisanego. Udowodnij, że $\angle NAM = \angle NAD$.

19. Okręgi o_1 i o_2, styczne do pewnej prostej odpowiednio w punktach A i B, przecinają się w punktach X i Y, przy czym punkt X leży bliżej prostej AB niż punkt Y. Prosta AX przecina okrąg o_2 w punkcie P różnym od X. Styczna do okręgu o_2 w punkcie P przecina prostą AB w punkcie Q. Wykazać, że $\angle XYZ = \angle BYQ$.