Bardo, 3-7 listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

(Nie)wymierność

Definicja 1. *Zbiór A nazwiemy liniowo niezależnym nad $\mathbb{Q}$, jeśli nie istnieją jego różne elementy $a_1, a_2, \ldots a_n \in A$ oraz niezerowe liczby wymierne $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{Q}$ takie, że:*

$$w_1a_1 + w_2a_2 + w_3a_3 + \ldots + w_na_n = 0$$

Chcemy udowodnić, że zbiór pierwiastków z liczb bezkwadratowych (tzn. iloczynów różnych liczb pierwszych) jest liniowo niezależny nad $\mathbb{Q}$.

Definicja 2. *Ciało to zbiór K z wyróżnionymi elementami 0 i 1 oraz ze zdefiniowanymi działaniami dodawania $(+)$ i mnożenia $(\cdot)$ spełniającymi następujące własności:*

1. *Dodawanie i mnożenie są zarówno łączne i przemienne.*
2. *0 jest elementem neutralnym dodawania, a 1 mnożenia.*
3. *Dla każdego $a \in K$ istnieje element $-a \in K$ taki, że $a + (-a) = 0$.*
4. *Dla każdego niezerowego $a \in K$ istnieje element $a^{-1} \in K$ taki, że $a \cdot a^{-1} = 1$.*
5. *$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$*

Znane przykłady ciał to: liczby wymierne, liczby rzeczywiste, liczby zespolone. Innym przykładem ciała jest $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, czyli zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi. Ten przykład nasuwa kolejną definicję: Jeśli $D \in K$ to przez $K[\sqrt{D}]$ będziemy oznaczać ciało złożone z liczb postaci $a + b\sqrt{D}$, gdzie $a, b \in K$. Na przykład $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt{3}]$ (oznaczane także w skrócie $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$) to zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Teraz pozostaje nam udowodnić następujący lemat:

Lemat. *Niech $p_1, p_2, p_3, \ldots$ będą kolejnymi liczbami pierwszymi. Wtedy*

$$\sqrt{p_{n+1}} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}]$$

Dowód (indukcyjny). *Niech $K_n = \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}]$. Udowodnimy, że jeśli pierwiastek z liczby bezkwadratowej x należy do K_n, to x nie ma innych dzielników pierwszych niż $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Dla $n = 0$ jest to oczywiste. la $n > 0$ stosujemy indukcję. Załóżmy, że $\sqrt{x} \in K_n$, czyli $\sqrt{x} = a + b\sqrt{p_n}$ dla $a, b \in K_{n-1}$. Podnosząc obustronnie do kwadratu otrzymujemy $x = a^2 + p_nb^2 + 2ab\sqrt{p_n}$. Otrzymujemy zatem $ab = 0$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy $\sqrt{p_n} = \frac{a^2+p_nb^2-x}{2ab} \in K_{n-1}$, a na mocy indukcji $\sqrt{p_n} \notin K_{n-1}$. Stąd $\sqrt{x} = a$ lub $\sqrt{x} = b\sqrt{p_n}$. Zatem jedna z liczb $\sqrt{x}, \sqrt{xp_n}, \sqrt{\frac{x}{p_n}}$ jest pierwiastkiem liczby bezkwadratowej należącym do K_{n-1} co kończy dowód kroku indukcyjnego dla n.*

Wniosek. *Zbiór pierwiastków z liczb bezkwadratowych jest liniowo niezależny nad liczbami wymiernymi.*

Materiały przygotował: Łukasz Orski.

1. *Udowodnij, że liczba* $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}}$ *jest niewymierna.*

2. *Niech* (x,y) *będzie parą liczb wymiernych spełniającą równanie* $\sqrt{x+3y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-2$. *Udowodnij, że* $x+3y$ *jest kwadratem liczby wymiernej.*

3. *Niech liczby* x,y,z *spełniają równość* $(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{y})(1+\sqrt{z})=5\sqrt{xyz}$. *Udowodnij, że każda z liczb* x,y,z *jest kwadratem liczby wymiernej.*

4. *Udowodnij, że liczba* $\log_2(3)$ *jest niewymierna.*

5. *Znajdź wszystkie trójki* (x,y,z) *liczb wymiernych spełniające* $x^2+y=y^2+z=z^2+x=3$.

6. *Liczba* $x^3+y^3>0$ *jest wymierna, a liczba* x^2+y^2 *jest niewymierna. Udowodnij, że* $x+y$ *jest niewymierna.*

7. *Liczba* $x+y$ *jest wymierna, a liczba* x^4+y^4 *jest niewymierna. Udowodnij, że liczba* $(x-y)^2$ *jest niewymierna.*

8. *Niech* $\{x\}$ *oznacza część ułamkową* x. *Niech będzie ustalona niecałkowita liczba wymierna* w. *Niech ciąg* a_n *bedzie zdefiniowany przez* $a_{n+1}=\{a_n^3-a_n\}$ *dla* $n\geqslant 0$ *oraz* $a_0=\{w\}$. *Udowodnij, że każdy wyraz ciągu* a_n *występuje w nim dokładnie raz.*

9. *Rozwiąż w liczbach wymiernych równanie* $x^2+y^2+z^2=7$.

10. *(*) Niech* $W(x)$ *będzie wielomianem o współczynnikach wymiernych stopnia co najmniej 2. Udowodnij, że nie każda liczba wymierna jest wartością* $W(x)$ *dla wymiernego* x.

11. *(*) Udowodnij, że istnieje taka niewymierna liczba dodatnia* x, *że dla dowolnego wymiernego* y *liczba* x^y *jest niewymierna.*