

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Równania i układy równań

Zadania

1. Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie:

(a) $xy + 1 = x + y$

(b) $xy = x + 2y$

(c) $xy = 3x + 5y + 7$

(d) $3xy - x + 2y = 1$

(e) $2xy = x + y$

2. Dana jest liczba pierwsza p . Wyznacz wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych spełniające równanie:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$

3. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) / czwórki (a, b, c, d) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

(a)
$$\begin{cases} ab = a + b \\ bc = b + c \\ ca = c + a \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = cd \\ a^2 + d^2 = ab \end{cases}$$

4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} ab = a + b + 1 \\ bc = b + c + 3 \\ ca = c + a + 7 \end{cases}$$

5. Oblicz $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

6. Czy istnieją takie dwie dodatnie liczby całkowite, których różnica wynosi 2 i których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej?

7. (Tożsamość Diofantosa) Udowodnij, że jeśli liczby naturalne m i n można przedstawić jako kwadraty liczb naturalnych, to ich iloczyn również.
8. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych (a, b, c) , dla których $a^2 = b^2 + c$.
9. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równość $a^3 + 3b^6 = c^2$.
10. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} 25x^2 + 9y^2 = 12yz \\ 9y^2 + 4z^2 = 20xz \\ 4z^2 + 25x^2 = 30xy \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z .

11. Udowodnij, że jeśli liczba n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych, to liczba $5n$ również.

Wskazówki

1. $xy + bx + ay = c \Leftrightarrow xy + bx + ay + ab = c + ab \Leftrightarrow (x + a)(y + b) = c + ab$
2. Doprowadź dane równanie do postaci $xy - px - py = 0$.
3. Odejmij stronami (w podpunkcie b) najpierw pomnóż przez 2 drugie równanie).
4. Zastosuj wskazówki do zadania 1. i pomnóż stronami.
5. Użyj wzoru skróconego mnożenia.
6. Sprawdź, czy można umieścić dany iloczyn pomiędzy kwadratami liczb naturalnych.
7. Nie używaj do tego tożsamości Diofantosa!
8. Użyj wzoru skróconego mnożenia.
9. Spróbuj podstawić pod a, b, c liczby z tą samą zmienną (np. $n, 2n, n^2$).
10. Dodaj stronami.
11. Skorzystaj z tożsamości Diofantosa.