Bardo Śląskie, 3-7 listopada 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Indukcja matematyczna

Przykłady

1. Udowodnić, że $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
2. Udowodnić, że $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$
3. Udowodnić, że $6|7^n-1$
4. Wykazać, że $100n<2^n+573$
5. Kolorujemy liczby naturalne. Na ten sam kolor pomalujemy liczby o różnicy 3, bądź ilorazie 5. Wykazać, że wystarczą dwa kolory.

Zadania na rozgrzewkę

6. Udowodnić, że $1+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$
7. Udowodnić, że $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
8. Udowodnić, że $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
9. Udowodnić, że $6|n^3+5n$
10. Udowodnić, że $19|(5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1})$
11. Udowodnić, że $133|(11^{n+1}+12^{2n-1})$
12. Wykazać, że $n!>2^n$
13. Udowodnić, że każdą kwotę n zł ($n\geqslant 4$) można rozmienić na dwuzłotówki i pięciozłotówki.
14. Udowodnić, że $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$
15. Udowodnić, że $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$
16. Udowodnić, że $F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$
17. Udowodnić, że $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$
18. Udowodnić, że $F_0^2+F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$

Zadania trudne

19. Znaleźć wzór sumy $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)\cdot n$
20. Znaleźć wzór sumy $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!$
21. Znaleźć wzór sumy $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$
22. Udowodnić, że $1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\cdots+n\cdot 3^{n-1}=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^n+\frac{1}{4}$
23. (nierówność Bernoulliego) Wykazać, że dla $x>-1$ zachodzi $(1+x)^n\geqslant 1+nx$
24. Wykazać, że $4^n>n^3$
25. Wykazać, że $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$
26. Znaleźć warunki i udowodnić dla nich, że $(n+1)^n<n^{n+1}$.
27. Pokazać indukcyjnie, że zbiór, który ma n elementów, ma dokładnie 2^n podzbiorów.

28. Udowodnić, że liczba przekątnych n-kąta wypukłego jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$.

29. Dane są klocki o kształcie kwadratu 2×2 z usuniętym rogiem 1×1. Używając tych klocków zbudować kwadrat o wymiarach $2^n \times 2^n$ z usuniętym klockiem 1×1.

30. Udowodnić, że n prostych może podzielić płaszczyznę na najwyżej $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ obszarów.

31. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnić, że $x^n + \frac{1}{x^n}$ jest liczbą całkowitą dla każdego n.

Zadania z olimpiad

32. (OM I, I etap, zadanie 5) Znaleźć wzór wyrażający sumę

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

w zależności od n.

33. (OM IX, III etap, zadanie 4) Dowieść, że jeżeli k jest liczbą naturalną, to

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^k}) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^m$$

gdzie m jest liczbą naturalną zależną od k; wyznaczyć m.

34. (OM LXXII, I etap, zadanie 1) Jacek ma n kart ponumerowanych kolejno liczbami $1, 2, \dots, n$, które układa na stole w rzędzie, w dowolnej wybranej przez siebie kolejności. Jacek będzie zdejmować karty ze stołu w kolejności zgodnej z numeracją kart: wpierw zdejmie kartę o numerze 1, potem kartę o numerze 2, i tak dalej. Zanim Jacek zacznie zdejmować karty, Placek pokoloruje każdą z kart na czerwono, niebiesko lub żółto. Udowodnić, że Placek może pokolorować karty w taki sposób, że podczas ich zdejmowania przez Jacka w każdym momencie spełniony będzie następujący warunek: pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajduje się co najmniej jedna karta innej barwy.

35. (OM LXXII, II etap, zadanie 1) Dana jest dodatnia liczba całkowita $k \geqslant 2$. Niech $p_1, p_2, \dots, p_k$ będą k najmniejszymi liczbami pierwszymi i niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $1, 2, \dots, N$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyście wiele spośród liczb $p_1, p_2, \dots, p_k$.

36. (OM LXXII, III etap, zadanie 1) Udowodnić, że dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a, b oraz dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność:

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geqslant \frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-2}$$