Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Teoria Liczb 3 - kilka twierdzeń

Twierdzenie 1 (Małe twierdzenie Fermata)**.** *Jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $a \in \mathbb{Z}$ jest takie, że $p \not| a$, to*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Funkcja Eulera. Dla $n \in \mathbf{N}$ przez $\phi(n)$ oznaczamy liczbę liczb ze zbioru $\{1, ..., n-1\}$, które są względnie pierwsza z n.

Twierdzenie 2 (Twierdzenie Eulera)**.** *Jeśli $a, n \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze, to*

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Twierdzenie 3 (Tw. Wilsona)**.** *Niech $p \in \mathbb{P}$. Wtedy*

$$(p-1)! \equiv -1 \quad (mod\ p).$$

Twierdzenie 4 (Odwrotności w ciele reszt modulo $p \in \mathbb{P}$)**.** *Niech $p \in \mathbb{P}$ wtedy dla każdego $a \in \{1, 2, ..., p-1\}$ istnieje $b \in \{1, 2, ..., p-1\}$, takie że*

$$a \cdot b \equiv 1 \quad (mod\ p).$$

1. Jaki dzień tygodnia będzie za $10^{10^{100}}$ dni?

2. Oblicz resztę z dzielenia liczby $2^{44} - 3^{85} + 5^{211}$ przez 43.

3. Niech $p \neq 2$ bedzie liczbą pierwszą. Dowieść, że liczba $1^p + 2^p + 3^p + ... + (p-2)^p + (p-1)^p$ jest podzielna przez:
(a) p,
(b) p^2.

4. Niech p bedzie liczbą pierwszą i niech $n = p^2 - 3p + 3$. Wykazać, że liczba $2^n - n + 1$ jest podzielna przez p.

5. Znajdź wszystkie liczby całkowite x takie, że $x^{86} \equiv 6$ $(mod\ 29)$.

6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić podzielność liczby $n^{n^7} - n^n$ przez 43.

7. Pewna liczba n spełnia $n^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5$. Znajdź n sprawdzając jaką resztę raje n przy dzielniu przez 3 i 5.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $n^{n^3} - n^n$ nie jest podzielna przez 5.

9. Wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n > 1$ równanie

$$(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} = y^n$$

nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych x, y.

Materiały przygotował: Marcin Preisner.

10. Niech $p > 5$ będzie liczbą pierwszą. Zapiszmy rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{1}{p}$. Wiadomo, że jest ono okresowe. Dowieść, że długość okresu podstawowego (najkrótszego mozliwego okresu) jest dzielnikiem liczby $p-1$.

11. Wykazać, że istnieje nieskonczenie wiele liczb naturalnych n dla których liczba:
(a) $n!+1$,
(b) $n!-1$,
jest złożona.

12. Udowodnij, że dla $p \in \mathbb{P}$ mamy:
(a) $p | \binom{2p}{p} - 2$,
(b) $p^2 | \binom{2p}{p} - 2$.

13. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy ładną wtedy i tylko wtedy, gdy suma reszt z dzielenia liczb $n, n^2, ..., n^{p-1}$ przez p jest równa $\frac{1}{2}p(p-1)$. Udowodnić, że w zbiorze $\{1, 2, ..., p-1\}$ liczb ładnych jest nieparzyście wiele.

14. Dla $p \in \mathbb{P}$ i $n \in \mathbb{N}$ wyznacz: $\phi(p)$ oraz $\phi(p^n)$.

15. Udowodnij, że $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ dla $a, b \in \mathbb{N}$, dla których $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$.

16. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby 7^{9^9}.

17. Znajdź trzy ostatnie cyfry liczby 3^{2005}.