V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Teoria Liczb 2 - jednoznaczność rozkładu i MTF

Twierdzenie 1. *Niech $k \in \mathbb{N}$, $a, b, m, n \in \mathbf{Z}$. Jeśli $k|a$ i $k|b$, to*

$$k|am + bn.$$

W szczególności k dzieli $a - b, a + b, 2a + 3b, \ldots.$

Twierdzenie 2 (Jednoznaczność rozkładu)**.** *Każda liczba naturalna rozkłada się jednoznacznie na iloczyn liczb pierwszych.*

Twierdzenie 3 (Małe twierdzenie Fermata)**.** *Jeśli p jest liczbą pierwszą oraz $a \in \mathbb{Z}$ jest takie, że $p \not| a$, to*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

1. Uzasadnij, że liczba $321^{654} + 123^{456}$ jest podzielna przez 10.

2. Znajdź cyfrę jedności liczby 7^{2021}.

3. Niech $k = 2008^2 + 2^{2008}$. Jaka jest cyfra jedności liczby $k^2 + 2^k$?

4. Znajdź resztę z dzielenia liczby 2^{1000} przy dzieleniu przez: $3, 4, 5, 6$ oraz 7.

5. Jaki dzień tygodnia będzie za $10^{10^{100}}$ dni?

6. Udowodnij cechę podzielności przez 11.

7. Oblicz resztę z dzielenia liczby $2^{44} - 3^{85} + 5^{211}$ przez 43.

8. Pokaż, że $x^p \equiv x$ $(mod\ p)$ dla $x \in \mathbb{Z}$ i liczby pierwszej p.

9. Niech $p \neq 2$ bedzie liczbą pierwszą. Dowieść, że liczba $1^p + 2^p + 3^p + ... + (p-2)^p + (p-1)^p$ jest podzielna przez p.

10. Niech p bedzie liczbą pierwszą i niech $n = p^2 - 3p + 3$. Wykazać, że liczba $2^n - n + 1$ jest podzielna przez p.

11. Pewna liczba n spełnia $n^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5$. Znajdź n sprawdzając jaką resztę raje n przy dzielniu przez 3 i 5.

12. Znajdź wszystkie liczby całkowite x takie, że $x^{86} \equiv 6$ $(mod\ 29)$.

13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić podzielność liczby $n^{n^7} - n^n$ przez 43.

14. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $n^{n^3} - n^n$ nie jest podzielna przez 5.

15. Dane sa takie liczby całkowite k, l, że liczba $k+2l$ jest podzielna przez 3. Wykaż, że liczba $2k + l$ też jest podzielna przez 3.

16. Dane sa takie liczby całkowite k, l, że liczba $3k + 4l$ jest podzielna przez 7. Wykaz, ze liczba $4k + 3l$ też jest podzielna przez 7.

Materiały przygotował: Marcin Preisner.

17. Dane sa takie liczby całkowite k, l, m, że liczba $2k+3l+4m$ jest podzielna przez 5. Wykaz, ze liczba $k+4l+2m$ też jest podzielna przez 5.

18. Czy liczbę 1100 można przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb, których największy wspólny dzielnik wynosi 11?

19. Iloczyn dwóch liczb całkowitych niepodzielnych przez 6 jest równy 144. Znajdź te liczby.

20. Znajdź liczby całkowite k, l, m, dla których

$$6^k \cdot 10^l \cdot 15^m = 9^{2000}$$

21. Ile dzielników naturalnych ma liczba 12^{10}?

22. Dla jakich n wyrażenie $\frac{3n}{2n-1}$ jest liczbą całkowitą?

23. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, d. Wiadomo, że liczba $a+b$ jest podzielna przez d, a liczba $a \cdot b$ jest podzielna przez d^2. Udowodnij, że każda z liczb a i b jest podzielna przez d.

24. Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste a i b spełniające równanie $a^2 - b^3 = 4$.

25. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby 7^{9^9}.

26. Znajdź trzy ostatnie cyfry liczby 3^{205}.