Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Teoria Liczb 1 - podzielność i reszty z dzielenia

Stosujemy oznaczenia: $\mathbf{N} = \{1, 2, ...\}$, $\mathbf{Z} = \{..., -1, 0, 1, 2, ...\}$, $\mathbf{P}$ - zbiór liczb pierwszych. Dla $k \in \mathbf{N}$ oraz $n \in \mathbf{Z}$ mówimy, że k dzieli n (zapisujemy $k|n$), gdy istnieje $m \in \mathbb{Z}$ takie że:

$$n = k \cdot m.$$

Wprowadzamy zapis (kongruencje):

$$n \equiv m \pmod k \qquad \iff \qquad k|(n - m).$$

Czytamy: n przystaje do m modulo k.

Twierdzenie 1. *Niech $p \in \mathbf{P}$ oraz $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeśli $p|a \cdot b$, to $p|a$ lub $p|b$.*

Twierdzenie 2 (O dzieleniu z resztą)**.** *Dla liczb $n \in \mathbf{Z}$ i $k \in \mathbf{N}$ istnieją $q \in \mathbf{Z}$ i $r \in \{0, 1, ..., k - 1\}$, takie że*

$$n = q \cdot k + r.$$

Twierdzenie 3 (Własności kongruencji)**.** *Niech $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, $k, n \in \mathbf{N}$ oraz:*

$$a \equiv b \quad (mod\ k), \qquad c \equiv d \quad (mod\ k).$$

Wtedy:

$$a \pm c \equiv b \pm d \quad (mod\ k), \qquad ac \equiv bd \quad (mod\ k), \qquad a^n \equiv b^n \quad (mod\ k).$$

1. Znajdź resztę z dzielenia przez 7 liczb: $145 \cdot 19$, $84500 \cdot 497888$.

2. Przez co trzeba podzielić 50, żeby otrzymać resztę 5? Ile jest możliwości.

3. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = 101 \\ ab + cd = 200. \end{cases}$$

Wykaż, że dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.

4. Uzasadnij, że jeżeli m i n są liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez 3, to jedna z liczb $mn + 1$, $m - n$ jest podzielna przez 3.

5. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą, to liczba $n \cdot (n + 3)$ jest podzielna przez 9 lub nie jest podzielna przez 3.

6. Jakie są możliwe reszty z dzielenia kwadratów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3, 5 i 8?

7. Jakie są możliwe reszty z dzielenia sześcianów liczb całkowitych przy dzieleniu przez 8?

8. Udowodnić, że nie istnieją liczby $a, b, c \in \mathbf{N}$, dla których $a^2 + b^2 = 8c + 6$.

Materiały przygotował: Marcin Preisner.

9. Udowodnij, że równanie

$$a^2 + b^2 = 100003$$

nie ma rozwiązań całkowitych.

10. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że liczba $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi „10”?

11. Dane sa liczby $a, b, c, d, e \in \mathbf{Z}$, dla których liczba $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3$ jest podzielna przez 9. Dowieść, że przynajmniej jedna z tych pięciu liczb jest podzielna przez 3.

12. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba $14^n - 9$ jest pierwsza.

13. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby $n^2 + n + 1$ oraz $n^2 + n + 3$ są pierwsze.

14. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a + b$ równa się 175.

15. Znajdź liczbę trzycyfrową, która jest 7 razy większa od liczby powstałej z niej poprzez wykreślenie środkowej cyfry.

16. Udowodnij, że liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6 dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$.

17. Jakie wspólne dzielniki mogą mieć liczby n i $n+6$, jeśli n jest liczbą naturalną?

18. Znajdź dziesięć kolejnych nieparzystych liczb naturalnych, których suma jest podzielna przez 99.

19. Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$.

20. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p, q), dla których liczba $p^2 + pq + q^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.

21. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba $n^3 - n$ jest kwadratem liczby całkowitej. [1]

[1] *Wskazówka:* Rozważaż przypadki $7|n$ i $7 \nmid n$.