Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Niezmienniki

1. Mamy 2021 zapałek. W jednym ruchu możemy zabrać lub dołożyć 2 zapałki. Czy wykonując pewną liczbę takich ruchów możemy zabrać wszystkie zapałki?

2. Hydra ma 2021 głów. Rycerz jednym cięciem miecza może uciąć jej 33, 57 lub 72 głowy. Jeśli odciąłby on inną liczbę, to hydrze odrasta tyle głów, że z powrotem ma ich ona 2021. Czy rycerz może pokonać hydrę?

3. Mamy 1 kartkę papieru. W każdym ruchu możemy wybrać sobie kartkę i rozciąć ją na 4 części. Czy po pewnym czasie możemy otrzymać dokładnie 2021 kartek papieru?

4. Mamy liczbę 2021!. Ruch polega na zastąpieniu tej liczby jej sumą cyfr. W pewnym momencie otrzymamy liczbę jednocyfrową. Jaka to będzie liczba?

5. Na tablicy narysowana jest 1 kreska. W jednym ruchu możemy podwoić liczbę narysowanych kresek lub zmazać 3 kreski. Czy możemy doprowadzić do sytuacji w której na tablicy nie zostanie żadna kreska?

6. Na tablicy zapisano dziesięć znaków "$+$" i piętnaście znaków "$-$". W jednym ruchu ścieramy dwa dowolne znaki i zapisujemy na tablicy "$+$", gdy znaki były takie same, oraz "$-$", jeśli były różne. W końcu, na tablicy zostanie tylko jeden znak. Jaki?

7. Czy w wyrażeniu $0 + 1 + 2 + 3 + ... + 10$ można zamienić niektóre znaki $+$ na $-$ w ten sposób, by wynik był równy 0?

8. Mamy 2 stosy po 10 kamieni. W jednym ruchu możemy zabrać 2 kamienie z wybranego stosu oraz dołożyć 1 kamień na drugi stos. Czy za pomocą takich ruchów możemy doprowadzić do sytuacji w której jeden stos będzie pusty, a na drugim będzie tylko 1 kamień?

9. Na pewnej wyspie mieszka 17 kameleonów czerwonych, 15 zielonych i 13 niebieskich. Jeśli spotkają się dwa kameleony o różnych kolorach, to oba zmieniają kolor na trzeci. Czy może się zdarzyć, że po pewnym czasie wszystkie kameleony na wyspie będą tego samego koloru?

10. Na szachownicy możemy pomalować na czerwono 25 pól. Czy jest możliwe, aby każde zamalowane pole sąsiadowało z nieparzystą liczbą zamalowanych pól (dwa pola sąsiadują ze sobą jeśli mają wspólny bok).

Materiały przygotował: Mateusz Padarz.

11. Czy szachownicę o wymiarach 8x8, z której usunięto lewe dolne oraz prawe górne pole, można pokryć kostkami domina o wymiarach 1x2?

12. Czy konik szachowy może przejść przez wszystkie pola szachownicy 8x8, stając na każdym dokładnie raz, jeśli zaczyna w lewym dolnym rogu i kończy w prawym górnym?

13. Na szachownicy o wymiarach 9x9 na każdym polu leży jedna moneta. Przesuwamy każdą z monet na pole graniczące bokiem z tym, na którym leżała do tej pory (na jednym polu może leżeć dowolnie dużo monet). Czy to możliwe, że znów na każdym polu leży moneta?

14. Czy szachownicę o wymiarach 10x10 można pokryć figurami w kształcie litery T?

15. Czy szachownicę o wymiarach 8x8 z usuniętym polem narożnym można pokryć prostokątami o wymiarach 1x3

16. Czy szachownicę o wymiarach 10x10 można pokryć prostokątami o wymiarach 1x4?

17. Czy szachownicę o wymiarach 10x10 można pokryć prostokątami o wymiarach 1x2 w taki sposób, by dokładnie połowa z nich była ustawiona poziomo?

18. Czy szachownicę o wymiarach 13x13 można pokryć przy użyciu kwadratów o wymiarach 2x2 oraz 3x3?

19. Czy szachownicę o wymiarach 24x24 można pokryć przy użyciu kwadratów o wymiarach 2x2, 3x3 oraz 5x5, przy czym kwadrat 5x5 jest dokładnie jeden?

20. Czy prostokątami 1x7 i 1x9 można pokryć szachownicę 11x11?

21. Wokół okrągłego stołu siedzi 10 dzieci. Na początku wszystkie 10 ciastek leży przed jednym z dzieci. W jednym ruchu jedno z dzieci, które ma przynajmniej 2 ciastka, przekazuje po jednym ciastku dziecku z lewej i dziecku z prawej. Czy może się tak zdarzyć, że po pewnej liczbie ruchów każde z dzieci będzie miało przed sobą dokładnie jedno ciastko?

22. W każde pole tablicy 11×11 należy wpisać jedną z liczb -1, 0, 1 w taki sposób, aby suma liczb w każdej kolumnie była nieujemna, a suma liczb w każdym wierszu była niedodatnia. Jaką najmniejszą liczbę zer można w ten sposób wpisać w pola tablicy?