Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Funkcje Tworzące

O funkcjach tworzących słów kilka:

Dany jest ciąg a_n. Funkcją tworzącą tego ciągu nazywamy:

$$G(x) = \sum_{i}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ...$$

Przykłady:

- $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1, a_n = 0$ dla $n > 5$

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1 - x^6}{1 - x};$$

- $a_n = 1$ dla każdego n

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1 - x}.$$

1. Znajdź funkcje tworzące poniższych ciągów

a) $a_0 = a_4 = 1, a_1 = a_3 = 4, a_2 = 6, a_n = 0$ dla $n > 4$
b) $b_n = (-1)^n$
c) $c_n = 1$ gdy $2|n$, $c_n = 0$ w przeciwnym przypadku
d) $d_n = n$
e) $e_0 = 0$, $e_n = \frac{1}{n}$, dla $n > 0$
f) $f_0 = f_1 = f_2 = 0, f_3 = f_4 = f_5 = ... = f_{2021} = 17, f_n = 0$ dla $n > 2021$.

Kilka zadań na manipulowanie funkcjami tworzącymi:

2. Niech $F(x)$ i $G(x)$ będą funkcjami fworzącymi ciągów a_n i b_n. Znajdź rekurencję na ciąg, którego funkcją tworzącą

a) $\alpha F(x) + \beta G(x)$ **b)** $x^k G(x)$ **c)** $F(x)G(x)$

3. Niech a_n będzie ciągiem o funkcji tworzącej $F(x)$. Jaką funkcję tworzącą ma ciąg:

a) $a_0, -a_1, a_2, -a_3, ...$
b) $a_0, a_2, a_4, a_6, ...$
c) $a_0, ca_1, c^2a_2, c^3a_3, ...$
d) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, ...$
e) $a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, ...$
f) $0, \frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, ...$

Materiały przygotował: Mateusz Kandybo.

Uogólniony współczynnik dwumianowy:

Normalny współczynnik dwumianowy dany był wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

W podobny sposób możemy zdefiniować uogólniony współczynnik dwumianowy:

$$\binom{r}{k} = \frac{r \cdot (r-1) \cdot ... \cdot (r-k+1)}{k!}.$$

Okazuje się, że przy pomocy uogólnionych współczynników dwumianowych można rozpisywać wyrażenia typu $(1+a)^u$:

$$(1+a)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}a + \binom{r}{2}a^2 + ... + \binom{r}{k}a^k + ...$$

4. Znajdź współczynnik stojący przy k-tej potędze:

a) $G_1(x) = (x+2)^5,\ k = 4$
b) $G_2(x) = \frac{1}{(1+x)},\ k = 19$
c) $G_3(x) = \frac{4}{(x-3)^2},\ k = 74$
d) $G_4(x) = \frac{2}{x^2-8x+15},\ k = 100$
e) $G_5(x) = \frac{1}{x^3+1},\ k = 2021$
f) $G_6(x) = \frac{x^2}{(x-1)^4},\ k = 404$

5. Na ile sposobów można wybrać 5-osobową delegację spośród 30-osobowej klasy?

6. Na ile sposobów można rozdać 7 jabłek pomiędzy Adama, Bartka, Czarka i Dominika (nie każdy musi cokolwiek dostać, ale wszystkie jabłka muszą zostać rozdane)?

7. Na ile sposobów można rozdać 7 jabłek pomiędzy Adama, Bartka, Czarka i Dominika tak aby Adam dostał parzystą liczbę jabłek, a Bartek podzielną przez 3?

8. Na ile sposobów można rozdać 2021 jabłek pomiędzy Adama, Bartka, Czarka i Dominika tak aby Adam dostał co najmniej 4 jabłka, Bartek dostał liczbę jabłek podzielną przez 7, Czarek nie dostał więcej niż 1000 jabłek, a Dominik nie dostał dokładnie 512 jabłek?

9. Na ile sposobów można pokryć pas $2 \times n$ przy użyciu niepokrywających się kafli domina o rozmiarach 2×1?

12. Na ile sposobów można pokryć pas $2 \times n$ przy użyciuniepokrywających się kafli domina $2 \times n$ oraz kafelków 2×2 z odciętym jednym narożnikiem?

10. *(Liczby Catalana)* Napisz, a następnie rozwiąż rekurencję na liczbę poprawnych nawiasowań.

11. Na ile sposobów można podzielić n kąt foremny na trójkąty prowadząc nieprzecinające się przekątne?

12. *(Nieporządki)* Pewna roztargniona sekretarka powkładała losowo zaproszenia dla n osób do n zaadresowanych kopert. Okazało się, że nikt nie dostał swojego zaproszenia. Na ile sposobów sekretarka mogła tak pomieszać zaproszenia?

13. Oblicz:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k}$