Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Geometria

1. (fakt 1.) Zauważ, że odcinek łączący środki boków w trójkącie jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy krótszy od niego.

2. (fakt 2.) Pokaż, że środkowa przeciwprostokątnej wydziela dwa trójkąty równoramienne i jej długość jest równa połowie przeciwprostokątnej.

3. (fakt 3.) Wykaż, że odległość wierzchołka trójkąta od ortocentrum jest dwa razy dłuższa niż odległość środka okręgu opisanego od przeciwległego boku.

4. (fakt 4.) Wykaż, że trójkąt (zwany spodkowym), którego wierzchołkami są spodki wysokości pewnego trójkąta ostrokątnego, odcina trzy trójkąty podobne.

5. (równość trójliścia) Niech W_1 oznacza punkt przecięcia się dwusiecznej kąta α z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$. Wykaż, że $CW_1 = W_1B = IW_1$, gdzie I to środek okręgu wpisanego (incentrum).

6. (twierdzenie Menelaosa) W trójkącie ABC punkty D, E, F leżą na bokach BC, AC i przedłużeniu AB. Wykaż, że D, E, F są współliniowe, wtedy i tylko wtedy , gdy $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

7. (twierdzenie Cevy) W trójkącie ABC punkty D, E, F leżą na bokach BC, AC, AB. Wykaż, że jeśli $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$ to proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

8. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC \neq BC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Na dwusiecznej kąta ACB wybrano taki punkt D, że DM $\perp$ AB. Punkty P, Q są rzutami prostokątnymi punktu D na proste AC i BC. Wykazać, że P, M, Q leżą na jednej prostej.

9. Punkt T leży wewnątrz trójkąta ABC. Proste AT, BT, CT przecinają boki BC, CA, AB w punktach D, E, F. Udowodnić, że $\frac{CT}{TF} = \frac{CE}{EA} + \frac{CD}{DB}$.

10. Pokaż, że dwusieczne kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Zauważ, że ten punkt jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt (incentrum).

11. Pokaż, że dwusieczne kąta wewnętrzego i dwóch pozostałych kątów zewnętrznych precinają się w jednym punkcie.

12. Wykaż, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie (ortocentrum).

13. Wykaż, że symetralne boków trójkąta przcinają się w jednym punkcie.

14. Udowodnij, że odcinki łączące wierzchołek trójkąta z punktem styczności okręgu wpisanego do przeciwległego boku przecinają się w jednym punkcie.

15. Dowieść, że w dowolnym trójkącie środek okręgu opisanego O, punkt przecięcia środkowych S i punkt przecięcia wysokości H leżą na jednej prostej oraz punkt S leży między punktami O, H i zachodzi równość $SH = 2\dot{S}O$

Materiały przygotowała: Martyna Firgolska.

16. Punkt A, B, C, D leżą na okręgu o środku O. Udowodnij, że $2\sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC$ (miara kąta wpisanego jest dwa razy większa od miary kąta środkowego opartego na tym łuku. Zayuważ, że wszystkie kąty oparte na tym łuku są równe.

17. Punkt A, B, C, D leżą na okręgu o środku O. Niech M - punkt przecięcia prostych AB i CD. Bso niech A leży między B i M oraz D między M i C. Pokaż, że $2\sphericalangle AMD = \sphericalangle AOB + \sphericalangle COD$

18. Pokaż, że suma przeciwległych kątów czworokąta wpisanego w okrąg jest równa 180°.

19. Pokaż, że jeśli suma przeciwległych kątów czworokąta jest równa 180°to można na nim opisać okrąg.

20. Dwa okręgi przecinają się w N i K. Prowadzimy przez te punktu proste AB i CD, przecinające pierwszy okrąg w A i C, drugi w B i D. Wykaż, że AC $\|$BD.

21. Niech P i Q - rzuty prostokątne dowolnego punktu M wewnątrz kąta o wierzchołku A na jego ramiona. Z A prowadzimy prostopadłą AK do odcinka PQ. Wykaż, że $\sphericalangle PAK = \sphericalangle MAQ$

22. Na okręgu dane są punkty w kolejności A, B, C, D. Niech M - środek łuku AB. Oznaczmy przeciącia cięci w MC i MD z cięciwą AB przez E i K. Wykaż, że na czworokącie EKCD można opisać okrąg.

23. Punkty A, B, C i D leżą na pewnym okręgu. Oznaczmy środki łuków AB, BC, CD i DA przez A_1, B_1, C_1, D_1. Udowodnij, że $A_1C_1 \perp B_1D_1$

24. Dane są dwa okręgi styczne wewnętrznie w M. Niech AB - cięciwa większego okręgu, styczna do mniejszego w T. Wykaż, że MT jest dwusieczną $\sphericalangle AMB$.

25. AB i CD - średnice pewnego okręgu. Punkt M na okręgu rzucamy prostopadle na te średnice. Wykaż, że odległość rzutów nie zależy od położenia punktu M.

26. Na okręgu dane są kolejno punkty: A, C_1, B, A_1, C, B_1. Wykaż, że jeśli proste AA_1, BB_1, CC_1 są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC, to są wysokościami trójkąta $A_1B_1C_1$.

27. Wykaż, że jeśli proste AA_1, BB_1, CC_1 są wysokościami trójkąta ABC, to są dwusiecznymi kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

28. W okrąg wpisano trójąty T_1, T_2 tak, że wierzchołki T_2 są środkami łuków, na które okrąg dzielą wierzchołki T_1. Wykaż, że przekątne sześciokąta, będącego wspólną częścią trójkątów T_1 i T_2, łączące przeciwległe wierzchołki są równoległe do boków T_1 i przecinają się w jednym punkcie.

29. Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie dzieli odcinek łączący środki okrągów wpisanego i dopisanego na pół.

30. Dany jest czworokąt wpisany i opisany na okręgu. Wykaż, że odcinki łączące przeciwległe punkty styczności są prostopadłe.

31. W trapezie $ABCD$ punkt o to punkt przecięcia się przekątnych. $\triangle OCD$ jest równoboczny. Wykaż, że środki odcinków OA, BC i OD są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

32. Okręgi o promieniach R_1 i R_2 przcinają się w K. Nich M i N - punkty styczności z okręgami wspólnej stycznej. Znajdź promień R okręgu opisanego na $\triangle KMN$.

33. Trzy okręgi o jednakowym promieniu R przecinają się w jednym punkcie S i w punktach M, N, P, przy czym S leży wewnątrz $\triangle MNP$. Wykaż, że okrąg opisany na $\triangle MNP$ ma promień R.

34. Wykaż, że suma kwadratów odcinków na jakie dzielą się prostopadłe cięciwy okręgu jest stała dla danego okręgu.

35. W trójkącie równoramiennym AB = BC. ∢ABC = 80°. Niech X wewnątrz trójkąta taki, że ∢XAC = 10°, ∢XCA = 30°. Oblicz ∢BXC.

36. W trójkącie ABC: ∢B = 60°i dwusieczne AD i CE przecinają się w I. Wykaż, że ID = IE.

37. (Twierdzenie Ptolemeusza) Wykaż, że iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta.

38. Niech X to dowolny punkt na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC. Wykaż, że największy z odcinków XA, XB, XC jest równy sumie dwóch pozostałych.

39. Trójkąt ABC wpisano w okrąg. Oznaczmy przez m, n, k odległości pewnego punktu X leżącego na okręgu od boków BC, AC, AB. Wykaż, że $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} + \frac{c}{k}$

40. Długości boków trójkąta ABC tworzą ciąg arytmetyczny (b > a > c). Wykaż, że jeśli na trójkącie opisać okrąg i przedłużyć dwusieczną AI do przecięcia z okręgiem w punkcie W, to AI = IW.

41. Wykaż, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości środka okręgu opisanego od boków trójkąta równa jest sumie promieni okręgów opisanego i wpisanego.

42. Dowolny okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta odcina na jego ramionach odcinki o długościach m i n, a na dwusiecznej o długości l. Wykaż, że stosunek $\frac{m+n}{l}$ nie zależy od położenia okręgu ani jego promienia.

43. ABCDEFG - siedmiokąt foremny. Wykaż, że $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$

44. W trójkąt ABC wpisano półkole tak, że średnica półkola zawiera się w boku BC. F_1, F_2 - punkty styczności z ramionami trójkąta. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na trójkącie w punkcie W. Dowiedź, że pole trójkąta S $= \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot AW$

45. Na przeciwprostokątnej zbudowano kwadrat na zewnątrz. Wyznacz odległość wierzchołka kąta prostego od środka symetrii kwadratu, wiedząc, że suma przyprostokątnych to m.

46. W trójkącie ABC punkty A, M_2, M_3, L_1 leżą na jednym okręgu. Wykaż, że $a\sqrt{2} = b+c$, gdzie M_2 i M_3 to środki AC i AB, L_1 - punkt przecięcia dwusiecznej ∢BAC z BC.

47. Proste wyznaczone przez dwusieczne kątów A, B i C trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na tym trójkącie odpowiednio w punktach W_1, W_2 i W_3. Udowodnij, że $AW_1 = BW_2 = CW_3 > AB + BC + AC$.