Paradoksalny rozkład kuli

Celem naszym jest pokazanie, że można podzielić kulę na skończenie wiele (niewielościennych, parami rozłącznych) kawałków, z których da się złożyć (izometrycznie) dwie kule tego rozmiaru co kula wyjściowa. To zjawisko nazywa się *paradoksalnym rozkładem kuli.*

Paradoksalny rozkład grupy wolnej.

Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich słów zbudowanych z „liter” a, b, a^{-1}, b^{-1} w których żadne dwie kolejne litery nie są do siebie odwrotne. Jednym z tych słów jest słowo puste, które będziemy oznaczać przez 0. Geometryczną reprezentacją $\mathcal{F}$ jest *cmentarzyk Janiszewskiego.* Słowa z F można mnożyć: iloczyn w i w' otrzymujemy pisząc ww' i skracając pary odwrotnych liter – jeśli takie się pojawiają na styku. Np. $aba^{-1} \cdot ba = aba^{-1}ba$, $aba^{-1} \cdot ab^{-1}a = aa = a^2$. (Zwykle zamiast $aaaa$ piszemy a^4, i podobnie dla innych liter.)

Zbiór $\mathcal{F}$ można „paradoksalnie rozłożyć”: Niech $\mathcal{A}$ oznacza zbiór słów zaczynających się na a, $\mathcal{B}$ zbiór słów zaczynających się na b, $\mathcal{C}$ zbiór słów zaczynających się na a^{-1}, $\mathcal{D}$ zbiór słów zaczynających się na b^{-1}. Wtedy

$$\mathcal{F} = \mathcal{A} \sqcup a\mathcal{C} = \mathcal{B} \sqcup b\mathcal{D} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C} \sqcup \mathcal{D} \sqcup \{0\}$$

(wszystkie sumy rozłączne). Można więc napisać: $\mathcal{F} \sim \mathcal{A} \sqcup \mathcal{C} \sim \mathcal{B} \sqcup \mathcal{D}$.

Denerwującego trochę składnika $\{0\}$ można się pozbyć. Niech $R = \{0, b, b^2, b^3, \ldots\}$; wtedy $\mathcal{F} = R \sqcup (F \setminus R) \sim aR \sqcup (\mathcal{F} \setminus R) = \mathcal{F} \setminus \{0\}$.

1. Użyj zbioru R by zmodyfikować definicje zbiorów $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ tak, żeby $\mathcal{F} = \mathcal{A} \sqcup a\mathcal{C} = \mathcal{B} \sqcup b\mathcal{D} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C} \sqcup \mathcal{D}$. Rysuj na cmentarzyku Janiszewskiego.

   W dalszym ciągu będziemy używać tych zmodyfikowanych zbiorów $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$.

Wolna podgrupa grupy obrotów.

Istnieją dwa obroty a i b przestrzeni trójwymiarowej $\mathbf{R}^3$, takie że jeśli podstawić je do dowolnego niepustego słowa $w \in \mathcal{F}$, to po wyliczeniu dostaje się izometrię różną od identycznościowej. (Przy wyliczaniu mnożenie zastępujemy składaniem.)

2. Uzasadnij, że dla takich a, b różne słowa wyliczają się do różnych izometrii.

Od tej pory będziemy utożsamiać $\mathcal{F}$ z rodziną izometrii uzyskaną przez wyliczanie słów na pewnych dwóch ustalonych obrotach o wskazanej własności.

(Istnienie takiej pary obrotów uzasadnimy później.)

Grupa wolna na sferze.

3. Udowodnij, że złożenie dwóch obrotów $\mathbf{R}^3$ wokół dwóch osi przechodzących przez O jest też obrotem wokół osi przechodzącej przez O. (Przypomnij sobie czym – i dlaczego – jest złożenie dwóch obrotów płaszczyzny; powtórz rozumowanie na sferze.)

W efekcie zbiór izometrii $\mathcal{F}$ składa się z obrotów. Niech S będzie pewną sferą o środku O, i niech Osie oznacza zbiór punktów sfery S leżących na osiach obrotów izometrii $w \in \mathcal{F} \setminus \{\mathrm{Id}\}$.

4. Uzasadnij, że nie każdy punkt sfery S leży w zbiorze Osie. (Zbiór Osie jest *przeliczalny* – jego elementy dają się przeliczyć, tj. ustawić w ciąg.)

5. Uzasadnij, że jeśli $r \in$ Osie i $w \in \mathcal{F}$, to $w(r) \in$ Osie. Uzasadnij, że jeśli $r \notin$ Osie i $w \in \mathcal{F}$, to $w(r) \notin$ Osie.
6. Niech $x \in S$ ale $x \notin$ Osie. Uzasadnij, że różne $w \in \mathcal{F}$ dają różne punkty $w(x)$.

Paradoksalny rozkład sfery.

Zbiór $\{w(x) : w \in \mathcal{F}\}$ nazywamy *orbitą* puntu x.

7. Uzasadnij, że orbity dwóch punktów są równe lub rozłączne.

Zbiór $S \setminus$ Osie da się więc przedstawić jako rozłączna suma (wielu) orbit. Wybierzmy z każdej takiej orbity po jednym elemencie, i niech Rep oznacza zbiór wybranych elementów (zbiór *reprezentantów*). Używając reprezentantów możemy zdefiniować odpowiedniki zbiorów $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ na sferze. Po pierwsze, dla $r \in$ Rep widzimy kopię $\mathcal{A}$ w orbicie r: $\mathcal{A}_r = \{w(r) : w \in \mathcal{A}\}$. Po drugie, te kopie można wysumować: $A = \bigcup_{r \in \mathrm{Rep}} \mathcal{A}_r$. Analogicznie postępujamy dla pozostałych trzech zbiorów.

8. Sprawdź, że $S \setminus \text{Osie} = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D = A \sqcup aC = B \sqcup bD$.

Zbioru Osie można się pozbyć tą techniką, którą potraktowaliśmy słowo puste w $\mathcal{F}$.

9. Uzasadnij, że istnieje obrót t (wokół prostej przechodzącej przez O, ale nie koniecznie leżący w $\mathcal{F}$), taki że dla $r, r' \in$ Osie równość $t^n(r) = t^k(r')$ zachodzi jedynie przy $r = r'$ i $n = k$.

Niech $R = \{t^n(r) : r \in \text{Osie}, n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

10. Sprawdź, że $tR = R \setminus \text{Osie}$. Uzasadnij, że $S = R \sqcup (S \setminus R) \sim S \setminus \text{Osie}$.
11. Podsumuj: $S \sim S \setminus \text{Osie} = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D \sim (S \setminus \text{Osie}) \sqcup (S \setminus \text{Osie}) \sim S \sqcup S$.

Paradoksalny rozkład kuli.

Kula K jest sumą koncentrycznych sfer i środka O. Każdą ze sfer można rozłożyć paradoksalnie, i w sumie zbudować dwie kule – jedną, niestety, bez środka.

12. Uzasadnij, że $K \sim K \setminus \{O\}$.

Wolna podgrupa grupy obrotów.

13. Udowodnij, że następujące macierze generują wolną podgrupę $\mathcal{F}$ grupy obrotów:

$$a = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(Jeśli podstawić macierze $5a$ i $5b$ do nietrywialnego słowa i policzyć modulo 5, to środkowy wyraz wyniku będzie niezerowy.)