Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Geometria

1. (Dla tych, co jeszcze nie wiedzą) Dany jest punkt P oraz okrąg ω. Wykaż, że istnieje liczba c, taka, że dla dowolnej prostej l przechodzącej przez P i przecinającej ω w dwóch punktach Q i R zachodzi $|PQ| \cdot |PR| = c$.

2. Niech $\mathrm{Pow}_\omega(X)$ oznacza potęgę punktu X względem okręgu ω. Dane są okręgi ω_1 oraz ω_2. Wykaż, że zbiór punktów dla których $\mathrm{Pow}_{\omega_1}(X) = \mathrm{Pow}_{\omega_2}(X)$ tworzy prostą prostopadłą do odcinka łączącego środki ω_1 oraz ω_2 (zbiór ten nazywamy *prostą potęgową*).

3. (BMO 2015) Dany jest nierównoramienny trójkąt ABC oraz opisany na nim okrąg ω. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Proste AI, BI oraz CI przecinają ω w punktach odpowiednio D, E, F. Proste równoległe do boków BC, AC i AB przechodzące przez I przecinają proste EF, DF i DE odpowiednio w punktach K, L, M. Wykaż, że punkty K, L i M są współliniowe.

4. Dane są trzy parami przecinające się okręgi ω_1, ω_2, ω_3, których środki nie są współliniowe. Dla każdej pary spośród tych okręgów zadano prostą przechodzą przez ich punkty przecięcia. Wykaż, że opisane proste przecinają się w jednym punkcie.

5. Wykaż, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

6. Wykaż, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

7. Dane są dwa okręgi ω_1 i ω_2 o środkach O_1 i O_2 odpowiednio, punkty A i B leżące na ω_1 oraz punkty C i D leżące na ω_2. Wykaż,że punkty A,B,C i D leżą na okręgu o środku, który nie należy do prostej O_1O_2 Wtedy i tylko wtedy, gdy AB i CD przecinają się na prostej potęgowej okręgów ω_1, ω_2.

8. (IMO 2008/1) Niech H będzie ortocentrum ostrokątnego trójkąta ABC. Okrąg o środku w połowie odcinka BC przechodzący przez H przecina prostą BC w punktach A_1 i A_2. Podobnie definiujemy punkty B_1, B_2, C_1, C_2. Wykaż, że szóstka tak zdefiniowanych punktów leży na wspólnym okręgu.

9. (USAMO 2009/1) Dane są okręgi ω_1, ω_2 o środkach odpowiednio O_1 oraz O_2, które przecinają się w punktach X oraz Y. Z punktu O_1 poprowadzono prostą k, która przecina ω_2 w punktach P i Q, a z punktu O_2 poprowadzono prostą l, która przecina ω_1 w punktach R i S. Wykaż, że jeśli P, Q, R i S leżą na wspólnym okręgu, to środek tego okręgu leży na prostej XY.

10. (USAMO 1995/5) Dany jest trójkąt ABC. Niech M i N będą punktami przecięcia okręgu o średnicy AB z wysokością poprowadzoną z wierzchołka C, a P i R - punktami przecięcia okręgu o średnicy AC z wysokością poprowadzoną z wierzchołka B. Wykaż, że M, N, P i R leżą na wspólnym okręgu.

Materiały przygotował: Dominik Gdesz.

11. Dany jest trójkąt ABC oraz wpisany w niego okrąg o środku I, styczny do BC w punkcie D. Prosta DI przecina odcinek AC w punkcie X. Prosta styczna do okręgu wpisanego w ABC przechodząca przez X przecina odcinek AB w punkcie Y, a prosta YI przecina BC w punkcie Z. Wykaż, że $|BZ| = |AB|$.

12. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A, a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D na odpowiednio boki AB i AC. Proste MN i AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach odpowiednio P, Q oraz A i R. Wykaż, że D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR.

13. Dany jest trójkąt ABC taki, że $3AC = AB+BC$. Okrąg dopisany do ABC jest styczny do odcinka AB w punkcie P, a do prostej AC - w punkcie Q. Wykaż, że $|\angle CPQ| = 90°$.

14. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech A_1, B_1, C_1 będą spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z punktów A, B i C. Niech A_2 będzie punktem symetrycznym do A względem prostej B_1C_1. Niech H będzie ortocentrum ABC, a O - środkiem okręgu opisanego na ABC. Wykaż, że czworokąty OHA_1A_2 oraz OA_2CB_1 można opisać na (być może różnych) okręgach.

15. Dany jest trójkąt ABC taki, że $|\angle CAB| = |\angle ACB| = 25°$. Punkt P leży na prostej AB tak, że $|\angle BCP| = 50°|$, a punkt Q leży na prostej AC tak, że $|\angle CPQ| = 55°|$. Oblicz $|\angle CBQ|$.

16. Dany jest ostrokątny trójkąt ABC. Okrąg ω, którego średnicą jest odcinek BC, przecina odcinki AB i AC w punktach D i E odpowiednio. Niech M będzie środkiem BC, a P - punktem przecięcia prostych AM i DE. Punkt X leży na krótszym łuku EF okręgu ω, punkt Y jest drugim punktem przecięcia prostej XP z ω. Wykaż, że $|\angle XAY| = |\angle XYM|$.

17. Dany jest trójkąt ostrokątny nierównoramienny ABC oraz opisany na nim okrąg ω. Prosta AO przecina wysokości poprowadzone z punktów B i C w punktach odpowiednio P i Q. Niech H będzie punktem przecięcia wysokości ABC. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie PQH znajduje się w punkcie przecięcia środkowych trójkąta ABC.