V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Kombinatoryka – Zliczanie

1. Na ile sposobów można ustawić n uczniów w rządku obok siebie? **(cegiełka 1)**

2. Na ile sposobów ze zbioru n kamieni można wybrać k kamieni ($k \leq n$)? **(cegiełka 2)**

3. Na ile sposobów można utworzyć n-elementowy ciąg zer i jedynek? **(cegiełka 3)**

4. Ile jest ścieżek od punktu $(1, 1)$ do punktu (n, n), jeśli jedyne ruchy, które możemy wykonywać to $(m, n) \longrightarrow (m + 1, n)$ oraz $(m, n) \longrightarrow (m, n + 1)$?

5. Na ile sposobów można utworzyć n-elementowy ciąg, którego każdy element jest jedną z liczb $\{1, 30, 2137, 4\}$?

6. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których 3 nie występuje po 4?

7. Ile jest rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k = n$ dla $x_i \in \mathbb{N}_0$?

8. Rozważmy wielomian $(1 + x)^{27}$. Należy wskazać współczynnik przy x^7.

9. Na wielkim balu w zasiedmiogórogrodzie było 20 kobiet i 30 mężczyzn. Ile razy nastąpiło przywitanie:
(a) kobieta-kobieta?
(b) mężczyzna-mężczyzna?
(c) kobieta-mężczyzna?

10. W matrycy Morfeusz spotyka się z swoimi przyjaciółmi. Jest ich (razem z Morfeuszem) n. Zapytaliśmy każdego, z iloma ludźmi się przywitał. Czy suma podanych liczb będzie parzysta? Ile będzie takich spotkań?

11. Beth Harmooo zagrała w turnieju szachowym, w którym każdy rozegrał z każdym 2 partie. Ilu było zawodników, jeśli rozegrano 42 partie?

12. Jonasz Indie napotkał na problem, bez którego nie zdobędzie Arki Janusza. Ile jest rozwiązań równania $x + y + z = 20$ dla $x, y, z \in \mathbb{N}$?

13. Charlie zakłada własną fabrykę czekolady! Nie chce jednak, aby jego czekolada była nudna. Zastanawia się, na ile sposobów może utworzyć blok czekolady $2 \times n$ tak, aby utworzyć go z domin (bloczków 2×1). Pomóż mu!

14. Na ile sposobów można wybrać 5 kulek tak, aby każda mogła być jednego z 4 kolorów (*Yellow*, *Green*, *Blue*, *Red*)? Kolejność kulek nie ma znaczenia.

15. Van-Benzyna jest miłośnikiem motoryzacji. Zadał Tobie pytanie, ile jest możliwych rejestracji, zawierających 2 litery i 5 cyfr (np. D75E924)?

Materiały przygotował: Bartosz Szachniewicz.

16. W pewnym miasteczku mieszka 345 zamężnych matematyczek. Każda z nich wie w każdej chwili czy mąż innej jest wierny czy nie, nic nie wie jednak o swoim mężu. Prawo tego miasteczka wymaga, aby każdy kto jest w stanie przeprowadzić dowód niewierności swojego partnera, zastrzelił go na specjalnym miejscu straceń tego samego dnia o zachodzie słońca. Każda matematyczka jest absolutnie inteligenta i absolutnie prawomyślna. Pewnego dnia Pani burmistrz (jedyna niezamężna w miasteczku) ogłosiła, że w miasteczku są niewierni mężowie. Zakazała porozumiewania się paniom matematyczkom w rzeczonej sprawie, jednocześnie nakazując przeprowadzenie rozumowań dowodowych. W rzeczywistości w miasteczku było 40 niewiernych mężów. Co się stanie w miasteczku po ogłoszeniu Pani burmistrz?

17. **(XXXV OM, etap I)** Na płaszczyźnie danych jest $3n$ punktów, wśród których nie ma trzech punktów współliniowych. Dowieść, że istnieje n rozłącznych trójkątów o wierzchołkach w danych punktach.

18. **(XXII OM, etap II)** Na ile sposobów można tak wybrać k pól szachownicy $n \times n$ $(k < n)$, aby żadne dwa z wybranych pól nie leżały ani w jednym wierszu, ani w jednej kolumnie?

19. **(XL OM, etap I)** Dla danej liczby naturalnej n wyznaczyć liczbę ciągów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, których wyrazy a_i należą do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ oraz spełniają warunek $|a_i - a_{i+1}| = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$.