Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Nierówności - grupy B i C

Zadania rozgrzewkowe: nierówności między średnimi (nierówność Cauchy'ego), indukcja, ciągi jednomonotoniczne

1. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+ : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$

2. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$

3. Wykazać, że jeśli liczby a, b, c są wieksze od 1, to $2\left(\frac{log_b a}{a+b} + \frac{log_c b}{b+c} + \frac{log_a c}{c+a}\right) \geqslant \frac{9}{a+b+c}$

4. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

5. Ciąg a_n zdefiniowany jest w następujący sposób: $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} + 1$
Udowodnij nierówność: $a_{2016} > \frac{1}{2} + a_{1000}$

Nierówność Bernoulliego: Dla dowolnego rzeczywistego $x \geqslant -1$ i $\alpha > 1$ zachodzi nierówność $(1+x)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha x$

1. Udowodnij nierówność Bernoulliego dla wymiernej liczby $\alpha > 1$ i $-1 < x \neq 0$.

2. Pokaż, że zachodzi $(1+x)^{\beta} < 1 + \beta x$, dla $0 < \beta < 1, x > -1$

Def: Funkcję $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą* (na $[a, b]$), jeśli dla wszystkich $x, y \in [a, b]$ i każdego $t \in [0, 1]$ zachodzi nierówność:

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$$

Gdy nierówność zachodzi w drugą stronę mówimy, że funkcja f jest *wklęsła.*

Nierówność Jensena Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją *wypukłą.* Jeżeli $x_1, x_2, \ldots x_n \in [a, b]$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$ oraz $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, to

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

Jeśli f jest wklęsła, nierówność zachodzi w drugą stronę.

1. Rozważ funkcję $f(x) = x^{\alpha}$ na $[0, \infty)$. Zastanów się jaka jest jej wypukłość w zależności od α (interesuje nas $\alpha > 0$). Następnie udowodnij nierówność Jensena.

2. Niech α, β, γ będą kątami w trójkącie. Pokaż, że $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$

3. Pokaż, że jeśli $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 1$, to: $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2$

Zadania różne

1. Udowodnij, że jeżeli suma dodatnich liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ równa jest jedności, to $\frac{(1-x_1)(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)}{x_1 x_2 \cdot\ldots\cdot x_n} \geqslant (n-1)^n$

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność:

$$2^{sinx} + 2^{cosx} \geqslant 2^{\frac{2-2\sqrt{2}}{2}}$$

3. Niech $a > b > 0$. Udowodnij, że $2ab\ ln\frac{b}{a} > b^2 - a^2$

4. Udowodnij $\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q^2}\right)...\left(1+\frac{1}{q^n}\right) < \frac{q-1}{q-2}$ dla $n \in \mathbb{N}, q > 2$

5. Wykaż, że dla dowolnych $x, y, z > \frac{3}{2}$ zachodzi nierówność:

$$x^{24} + \sqrt[5]{y^{60} + z^{40}} \geqslant \left(x^4y^3 + \frac{1}{3}y^2z^2 + \frac{1}{9}x^3z^3\right)^2$$

6. Wykaż, że dla nieujemnych a, b, c, takich że $a + b + c = 1$ zachodzi

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geqslant \frac{1}{4}$$

7. (II OM) Dowieść, że jeżeli $a, b, c > 0$, to zachodzi nierówność

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geqslant 6abc$$

8. (V OM) Dowieść, że jeżeli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są kątami z przedziału $(0, \pi)$, a n jest dowolną liczbą naturalną, większą od 1, to

$$sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) < sinx_1 + sinx_2 + \ldots + sinx_n$$

9. (XX OM) Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b i naturalnego n zachodzi

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

10. (XX OM) Udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych n, m zachodzi nierówność:

$$1^m + 2^m + \ldots + n^m \geqslant n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^m$$

11. (XXII OM) Dowieść, że jeżeli A, B, C są kątami trójkąta, to

$$1 < cosA + cosB + cosC \leqslant \frac{3}{2}$$

12. Udowodnić, że jeżeli liczby dodatnie x, y, z spełniają nierówność $\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy} + \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz} + \frac{z^2+x^2-y^2}{2xz} > 1$, to są one dł. boków pewnego trójkąta.

13. (XXXIX OM) Liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ należące do przedziału $[0, 1]$ spełniają warunek $\sum_{i=1}^{n} x_i = m + r$, gdzie m jest liczbą całkowitą, $r \in [0, 1)$. Dowieść, że $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant m + r^2$

14. (IMO 95) Dla $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ spełniających warunek $abc = 1$. Udowodnij, nierówność $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$