V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Nierówności – grupa A

1. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a,b prawdziwe są nierówności:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$$

2. Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $ab = 49$ to $(a+1)(b+1) \geq 64$.

3. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

4. Udowodnij, że jeśli $a, b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

5. Rozwiąż nierówność: $\frac{x-1}{x-2} \leq \frac{x-2}{x-1}$.

Indukcja

1. **Nierówność Bernoulliego** Pokaż, że dla dowolnego rzeczywistego $a > -1$ i każdego całkowitego nieujemnego n zachodzi nierówność $(1+a)^n \geq 1 + na$.

2. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Nierówności pomiędzy średnimi

Średnią arytmetyczną *liczb rzeczywistych* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę:

$$S_A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Średnią geometryczną *liczb nieujemnych* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę:

$$S_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Średnią harmoniczną *liczb rzeczywistych różnych od zera* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę:

$$S_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Średnią kwadratową *liczb rzeczywistych różnych od zera* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę:

$$S_K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

Zachodzi nierówność $S_K \geq S_A \geq S_G \geq S_H$

1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność $\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leq a + b + c$.

2. Wykazać, że dla nieujemnych liczb a, b zachodzi nierówność $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$.

3. Wykazać, że jeśli $x, y, z > 0$ i $x + y + z = a$, to $(a-x)(a-y)(a-z) \geq 8xyz$.

4. Wykazać, że jeśli liczby a, b, c są większe od 1, to $2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Ciągi jednomonotoniczne

Jeżeli ciągi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są jednomonotoniczne (tzn. $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ lub $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$), to

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a_1b_1' + a_2b_2' + \ldots + a_nb_n' \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1,$$

gdzie $(b_1', b_2', \ldots, b_n')$ jest dowolną permutacją ciągu b.

1. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi:
$a^2b + b^2c + c^2d + d^2a \leq a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

2. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi:
$\frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq 2(a+b+c)$.

3. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

4. Niech w trójkącie ABC liczby h_a, h_b, h_c oznaczają długości wysokości opuszczonych na boki długości a, b, c odpowiednio. Uzasadnij, że:

$$(a+b+c)(h_a+h_b+h_c) \geq 18P_{ABC}$$

.

Zadania różne

1. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+ : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$.

2. Ciąg a_n zdefiniowany jest w następujący sposób: $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} + 1$. Udowodnij nierówność: $a_{2016} > \frac{1}{2} + a_{1000}$.

3. Rozwiąż nierówność: $\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{\sqrt{1-x}} > \left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{x}$.

4. (XIII OMJ) Dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniają równość:
$m^2 + n = k^2 + k$. Wykaż, że $m \leq n$.

5. (XIV OMJ) Liczby całkowite a, b, c są różne od 0 i spełniają zależność:
$\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}$. Wykaż, że $a + b + c \leq 0$.

6. (VI OMG) Udowodnij, że dla każdych liczb $x, y, z \in (0,1)$ spełniona jest nierówność $x(1-y)^2 + y(1-x)^2 < (1-xyz)^2$.

7. (XXIII OM) Udowodnić, że jeśli A, B, C są kątami trójkąta, zaś t – liczbą rzeczywistą, to $\cos A + t(\cos B + \cos C) \leq 1 + \frac{t^2}{2}$.

8. (XLIV OM) Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność:

$$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2) \leq (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2.$$

9. (XXV OM) Dowieść, że dla każdego m naturalnego:

$$\frac{(2m+1)2m(2m-1)\ldots(m+2)}{m!} < 2^{2m}.$$