Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Współrzędne barycentryczne

Współrzędne barycentryczne to sposób opisywania pozycji punktu zależny od pewnego ustalonego trójkąta. Rolę osi układu grają tu boki trójkąta, więc takie podejście do analitycznego rozwiązania zadań geometrycznych wydaje się bardziej naturalne od arbitralnego umieszczania danego trójkąta w standardowym układzie współrzędnych.

Definicja 1. *Dany jest trójkąt ABC i punkt P. Znormalizowanymi współrzędnymi barycentrycznymi punktu P nazywamy taką trójkę liczb rzeczywistych (x, y, z), że*

$$\vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} \quad \text{oraz} \quad x + y + z = 1.$$

Definicja 2. *Dany jest trójkąt ABC i punkt P. Współrzędnymi barycentrycznymi punktu P nazywamy taką trójkę liczb rzeczywistych $(x : y : z)$, że*

$$P = \left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right).$$

Uwaga 3. *W zadaniach zakładamy, że dany jest trójkąt ABC o bokach $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, środku ciężkości G oraz środku okręgu wpisanego I.*

1. Podaj współrzędne barycentryczne punktów A, B, C, środka odcinka AB i punktu G.

2. Jakie warunki muszą spełniać liczby x, y, z, by punkt (x, y, z) znalazł się wewnątrz trójkąta ABC?

3. Udowodnij, że punkt $(x : y : z)$ jest środkiem masy układu: masa x w punkcie A, masa y w punkcie B i masa z w punkcie C.

4. Niech $P = (x : y : z)$. Niech punkt D będzie punktem przecięcia prostej AP i odcinka BC. Analogicznie definiujemy punkty E i F. W jakich stosunkach punkty D, E i F dzielą boki, na których leżą?

5. Narysuj ulubiony trójkąt ABC i wyznacz konstrukcyjnie punkt $(1 : 2 : 3)$.

6. Udowodnij, że $I = (a : b : c)$.

7. (Twierdzenie Cevy) Punkty D, E i F leżą na bokach odpowiednio BC, CA i AB. Udowodnij, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

8. Niech $P = (x : y : z)$. Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Udowodnij, że $([PBC] : [PCA] : [PAB]) = (x : y : z)$.

9. Znaleźć taki punkt P, żeby pola trójkątów APB, BPC, CPA były w stosunku $1 : 2 : 3$.

Materiały przygotował: Bartosz Chomiński.

10. Udowodnij, że równanie prostej przechodzącej przez punkty (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) we współrzędnych barycentrycznych jest postaci

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wskazówka: Z określenia danych punktów przez przez wektory w definicji współrzędnych barycentrycznych wynika, że prosta ℓ przechodząca przez te punkty jest postaci

$$\ell = \{(x, y, z) : (x, y, z) = \lambda \cdot (x_1, y_1, z_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2, y_2, z_2), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

11. Udowodnij, że równanie prostej we współrzędnych barycentrycznych jest postaci

$$ux + vy + wz = 0.$$

12. Na środkowej CM obrano punkt N i poprowadzono prostą AN przecinającą bok BC w punkcie Q oraz prostą BN przecinającą bok AC w punkcie P. Dowieść, że prosta PQ jest równoległa do prostej AB.

13. Niech F będzie takim punktem na boku AB, że $|AF| = 2|BF|$. Jaki warunek muszą spełniać boki trójkąta, by punkt przecięcia odcinków CF i dwusiecznej kąta A był środkiem okręgu wpisanego?

14. $(*)$ Niech $P = (x_1, y_1, z_1), Q = (x_2, y_2, z_2), R = (x_3, y_3, z_3)$. Udowodnij, że

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

15. Na bokach BC, CA, AB obrano odpowiednio punkty D, E, F w taki sposób, że

$$BD : DC = CE : EA = AF : FB = k,$$

gdzie k jest daną liczbą dodatnią. Mając dane pole S trójkąta ABC obliczyć pole trójkąta DEF.

16. Niech D, E i F będą spodkami dwusiecznych. Jakie wartości może przyjmować ułamek $\frac{[DEF]}{[ABC]}$? Dla jakich trójkątów ABC osiągnięta jest maksymalna wartość?

17. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ przeciwległe boki są równoległe. Udowodnić, że trójkąty ACE i BDF mają równe pola.

18. Trójkątny kawałek blachy waży 900 g. Dowieść, że rozcinając tę blachę po prostej przechodzącej przez środek ciężkości trójkąta nie można odciąć kawałka ważącego mniej niż 400 g.

19. $(*)$ Udowodnij, że trzy proste $u_1x + v_1y + w_1z = 0$, $u_2x + v_2y + w_2z = 0$ i $u_3x + v_3y + w_3z = 0$ mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

20. Udowodnij, że ((a) dwusieczne, (b) środkowe, (c) wysokości) trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

21. Niech D będzie takim punktem na boku CA, że $2|AD| = |DC|$. Niech E będzie takim punktem na odcinku BD, że $2|BE| = |ED|$. Niech F będzie środkiem odcinka EC. Niech G będzie punktem przecięcia odcinków AF i BE. Podaj liczbę $[EFG]/[ABC]$.

22. Punkt M jest środkiem boku BC. Okrąg wpisany w trójkąt ABM jest styczny do boku AB w punkcie D. Okrąg wpisany w trójkąt ACM jest styczny do boku AC w punkcie E. Punkt F jest taki, że czworokąt $DMEF$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że punkt F leży na prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC.