

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Równania funkcyjne

1. Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych. Wykaż, że $1 + c > b$.

2. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x + y) = f(x) - f(y).$$

3. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniające dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ równość

$$f(n + 1) = f(n) + n.$$

4. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$(f(x))^2 = x^2.$$

5. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$ równość

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

6. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x^2 - 6x + 5) - 2y = f(x^2) + f(y) + 12x - 10.$$

7. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ równość

$$2f(x) + f\left(\frac{2x - 3}{x - 2}\right) = f(2).$$

8. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(xy) = f(x) - f(y).$$

9. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x + y) = f(1)(2x + y)^2.$$

10. Znajdź wszystkie niemalejące funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniające dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ równość

$$2^{f(n+2)-f(n+1)} = f(n) \cdot 3^{f(n+1)-f(n)}.$$

11. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x+y) - 2f(xy) - 3f(x) + (2x^2 - 1)f(y) = 2x(xy - 1) - 5.$$

12. Znajdź wszystkie funkcje niemalejące $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ równość

$$f(f(x)) = -x.$$

13. Znajdź wszystkie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x) = \pi f(\pi x).$$

14. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$(f(x+y))^2 = (f(x))^2 + (f(y))^2.$$

15. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy.$$

16. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Q}$ równości

$$f(1) = 2, \quad f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1.$$

17. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

i dodatkowo:

- (a) f jest ciągła;
- (b) f jest monotoniczna;
- (c) f jest nieujemna na pewnym przedziale;
- (d) $f(xy) = f(x)f(y)$;
- (*) bez dodatkowych warunków;
- (**) f jest *inwolucją*, czyli $f(f(x)) = x$.

18. Znajdź wszystkie ciągłe funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

(a)

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

(b)

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

(c)

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

19. Znajdź wszystkie ciągłe funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

20. Znajdź wszystkie funkcje monotoniczne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x^2 + y^2) = xf(x) + yf(y).$$

21. Znajdź wszystkie bijekcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniające dla wszystkich $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$ warunek

$$f(n+m) | f(2^n + m).$$

22. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

(a)

$$11 + f(x^7 + 6y) = f(x^5 + 4y) - 3f(y).$$

(b)

$$3 + f(x^4 + 5y) = f(x^6 + 7y) - 11f(y).$$

23. Znajdź wszystkie funkcje ciągłe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ równość

$$f(f(x)) = -x.$$

24. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniające dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ równości

$$f(1) = 0, \quad f(n) = n - 1 + f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil).$$

25. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniające dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ równość

$$f(f(n)) + f(n+1) = n+2.$$

26. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(f(x) + x + y) = f(x + y) + yf(y).$$

27. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniające dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ równość

$$f(f(n)) = 2n.$$