Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Rekurencja

1. Zapisz w postaci liniowego (jednorodnego) równania rekurencyjnego ciągi:

a) $a_n = \sqrt{5} \cdot 5^n$ *b)* $b_n = n$ *c)* $c_{n+1} = c_n + 2^n$ *d)* $d_n = 2^n n$

2. Rozwiąż równania rekurencyjne:

a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 2, a_1 = 5$ *b)* $b_{n+2} = 4b_n, b_0 = b_1 = 1$

c) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, F_0 = 0, F_1 = 1$ *d)* $d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n, d_0 = 4, d_1 = 2$

e) $e_{n+2} = -6e_{n+1} - 9e_n, e_0 = 3, e_1 = -9$ *f)* $f_{n+1} = f_n + (n+1), f_0 = 0$

3. Znajdź postać ogólną ciągów:

a) $a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - 12a_n$ *b)* $b_{n+3} = 9b_{n+2} - 27b_{n+1} + 27b_n$

c) $c_{n+2} = 2c_{n+1} - c_n + 3n^2$ *d)* $d_{n+1} = 4d_n + n(n+1) + 3^n$

4. Znajdź *(przez rozwiązanie rekurencji)* zwarte wzory na sumy:

a) $A_n = \sum_{k=0}^{n} 1$ *b)* $B_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$ *c)* $C_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k k$

5. Dla każdego $n \geqslant 1$ niech t_n oznacza liczbę ciągów długości n zbudowanych z symboli a, b, c, w których dwie samogłoski nie występują obok siebie. Znajdź i rozwiąż zależność rekurencyjną na t_n.

6. Jaka jest największa możliwa liczba obszarów wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

7. Na ile sposobów można przypisać wartości prawda/fałsz zmiennym $p_0, ..., p_n$, by poniższy ciąg implikacji był prawdziwy:

$$((\ldots((p_0 \Rightarrow p_1) \Rightarrow p_2)...) \Rightarrow p_n).$$

8. Mamy dane 2^n monet każda o innej wadze. Sortujemy je od najlżejszej do najcięższej w następujący sposób: najpierw dzielimy je na dwie równe części, każdą z tych części sortujemy tą samą metodą, a na koniec porównujemy dwie najcięższe monety z obu części, odkładamy najcięższą i powtarzamy. Ile maksymalnie ważeń potrzebujemy?

9. Znajdź ciągi u_n, t_n jeśli:

$$\begin{cases} t_0 = 2, \quad u_0 = 3 \\ t_{n+1} = 6t_n + 4u_n \\ u_{n+1} = t_n + 3u_n \end{cases}$$

Wskazówka: wyprowadź rekurencję dla jednego ciągu.

10. (LVIII OM) Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ wyznaczyć liczbę ciągów $(c_1, ..., c_n)$, gdzie $c_i \in \{0, ..., 9\}$, o następującej własności: w każdej trójce kolejnych wyrazów są co najmniej dwa wyrazy równe.

11. (LVI OM) Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, ...$ spełniający równanie

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}$$

Materiały przygotował: Adam Morawski.

Rozwy

1.

$a)\ a_{n+1} = 5a_n \quad b) b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n \ c)\ c_{n+2} = c_{n+1} + 2(c_{n+1} - c_n)\ d_{n+2} = 4d_{n+1} - 2d_n$

2.

$a)\ a_n = 2^n + 3^n$

$b)\ a_n = \frac{3}{4}2^n + \frac{1}{4}(-2)^n = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$c)\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

$d)\ d_n = 4 - 2n$

$e)\ e_n = (-3)^n + 0 \cdot n(-3)^n$

$f)\ f_{n+1} = f_n + (n+1)$

3. Uwaga, w c,d nie wychodzą $\Leftrightarrow$ tym równaniom (stałe mogą nie być niezależne)

$a)\ a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 n 2^n + \alpha_3(-3)^n$

$b) b_n = \beta_1 3^n + \beta_2 3^n n + a_3 3^n n^2$

$c)\ b_n = \gamma_1 + n\gamma_2 + n^2\gamma_3 + n^3\gamma_4 + n^4\gamma_5$

$d)\ d_n = \delta_1 4^n + \delta_2 3^n + \delta_3 + n\delta_4 + n^2\delta_5$

4.

$a)\ A_{n+1} = A_n + 1,\ A_n = n + 1$

$b)\ B_n = 0 \cdot 1\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$

$c)\ C_n = 2 - 2 \cdot 2^n + 2n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$

5. Ciągów dł. $n+1$ kończących się na b, c jest $2t_n$, stąd

$$t_{n+2} = 3 \cdot 2t_n + 2(t_{n+1} - 2t_n) = t_{n+1} + 2t_n = 2^n - (-1)^n$$

6. $u_{n+1} = u_n + (n+1), u_0 = 1$

7. na k_n, gdzie $k_0 = 1,\ k_1 = 3,\ k_{n+1} = k_n + 2^n$, więc $k_n = 2^n + 1$.

8. na x_n, gdzie $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 5, x_{n+1} = 2x_n + 2^{n+1} - 1,\ x_n = 1,5 \cdot 2^n n - 2^{n+1} + 2$

9. $t_{n+2} = 6t_{n+1} + 4t_n + 12u_n$, ale $3t_{n+1} = 18t_n + 12u_n$, więc $t_{n+2} = 9t_{n+1} - 14t_n$, $t_n = -2 \cdot 2^n + 4 \cdot 7^n$,
$u_n = t_n + \frac{3}{4}(t_{n+1} - 6t_n) = \frac{3}{4}t_{n+1} - \frac{7}{2}t_n = 4 \cdot 2^n + 7 \cdot 7^n$

10. https://archom.ptm.org.pl/?q=node/101

11. sposób II :https://archom.ptm.org.pl/?q=node/246 $x_n = \frac{1}{a_n}$, $s_{n+2} = -s_{n+1} + s_n$, $s_n = \alpha(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})^n$, patrząc na $n \to \infty$ mamy, że $\beta = 0$. $a_n = \frac{1}{\alpha}(\frac{2}{-1+\sqrt{5}})^n$. Nie ma takiej alfy.