Bardo, listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Rekurencja

Równaniem rekurencyjnym *liniowym, jednorodnym* nazwiemy równanie postaci:

$$f_{n+k} = \alpha_{k-1}f_{n+k-1} + \alpha_{k-2}f_{n+k-2} + \cdots + \alpha_1 f_{n+1} + \alpha_0 f_n,$$

gdzie $\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}$ są pewnymi stałymi.

Twierdzenie 1. *Jeśli ciągi $\langle a_n\rangle, \langle b_n\rangle$ spełniają równanie rekurencyjne $f_{n+k} = \alpha_{k-1}f_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 f_n$, to spełnia je również ciąg*

$$\langle \alpha a_n + \beta b_n\rangle,$$

dla dowolnych stałych α, β.

Na przykład równanie $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ jest spełniane przez ciągi $\langle 1\rangle, \langle 2^n\rangle$, więc również przez ciąg $\langle 3\cdot 2^n + 5\rangle$.

Równaniem charakterystycznym równania rekurencyjnego $f_{n+k} = \alpha_{k-1}f_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 f_n$ nazywamy równanie

$$0 = x^k - \alpha_{k-1}x^{k-1} - \alpha_{k-2}x^{k-2} - \cdots - \alpha_0 \ \ (\Leftrightarrow x^k = \alpha_{k-1}x^{k-1} + \cdots + \alpha_0).$$

Twierdzenie 2. *Równaniem charakterystycznym dla ciągu $\langle a_n\rangle$ jest*

$$(x-c_1)^{d_1}(x-c_2)^{d_2}(x-c_3)^{d_3}...(x-c_k)^{d_k} = 0$$

(dla parami różnych c_i) wtedy i tylko wtedy gdy ciąg jest postaci

$$a_n = (\alpha_{1,1}c_1^n + \alpha_{1,2}nc_1^n + \cdots + \alpha_{1,d_1}n^{d_1}c_1^n) + (\alpha_{2,1}c_2^n + \cdots + \alpha_{2,d_2}n^{d_2}c_2^n) + \cdots + \alpha_{k,d_k}n^{d_k}c_k^n)$$

dla pewnych stałych $\alpha_{i,j}$.

Na przykład rozwiązania równania $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ o równaniu charakterystycznym $(x-2)(x-1) = 0$ są dowolne ciągi postaci $\alpha + \beta 2^n$, zaś równania $b_{n+2} = 4b_{n+1} - 4b_n$ o równaniu charakterystycznym $(x-2)^2 = 0$ ciągi postaci $\alpha 2^n + \beta n 2^n$.

Algorytm. *Ciąg spełnia równanie $f_{n+k} = \alpha_{k-1}f_{n+k-1} + \alpha_{k-2}f_{n+k-2} + ... + \alpha_0 f_n$.*
Znajdujemy równanie charakterystyczna ciągu: $x^k - \alpha_{k-1}x^{k-1} - \alpha_{k-2}x^{k-2} - ... - x\alpha_1 - \alpha_0 = 0$
Znajdujemy pierwiastki wielomianu - równania charakterystycznego[1]*.*
Znajdujemy postać ciągu f_n z twierdzenia (2).
Rozwiązujemy układ równań uzyskany z podstawienia za n wartości $0, 1, ..., k-1$.

Równaniem rekurencyjnym *liniowym, niejednorodnym* nazwiemy równanie postaci:

$$f_{n+k} = \alpha_{k-1}f_{n+k-1} + \alpha_{k-2}f_{n+k-2} + \cdots + \alpha_1 f_{n+1} + \alpha_0 f_n + c_n,$$

gdzie c_n jest ciągiem.

Twierdzenie 3. *Jeśli mamy ciąg $h_{n+k} = a_{k-1}h_{n+k-1} + \cdots + a_1 h_{n+1} + a_0 h_n$ ma równanie charakterystyczne $W(x) = 0$ oraz ciąg c_n o równaniu $Q(x) = 0$, to ciąg*

$$f_{n+k} = a_{k-1}f_{n+k-1} + \cdots + a_1 f_{n+1} + a_0 f_n + c_n$$

(jest takiej postaci jakby miał) równanie charakterystyczne $Q(x)\cdot W(x)$.

Twierdzenie 4. *Jeśli ciąg $\langle \tilde{f}_n\rangle$ spełnia równanie $f_{n+k} = \alpha_{k-1}f_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 f_n$, oraz ciąg $\langle \overline{f}_n\rangle$ spełnia równanie*

$$(*) \qquad f_{n+k} = \alpha_{k-1}f_{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 f_n + c_n,$$

to również ciąg $\langle \beta\tilde{f}_n + \overline{f}_n\rangle$ spełnia równanie (*).

Materiały przygotował: Adam Morawski.

[1] Jeśli w rozkładzie dostaniemy wielomian nierozkładalny nad $\mathbb{R}$, to musimy użyć liczb zespolonych