
V Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 3–7 listopada 2021

Liga zadaniowa – dzień 4.

Z tej listy członkowie grup B,C mogą oddawać zadania 24-26.

- 22.** Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x , które spełniają równanie:

$$(x^2 - 4x + 2)^6 - 12(x^2 - 4x + 2)^4 + 48(x^2 - 4x + 2)^2 - 64 = 0.$$

- 23.** W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników, każdy z każdym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Udowodnić, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.
- 24.** Dane są współśrodkowe okręgi C_1 i C_2 takie, że C_1 leży wewnątrz okręgu C_2 oraz punkty P_1, P_2 leżące na C_1 takie, że P_1P_2 nie jest średnicą C_1 . Odcinek P_1P_2 przedłużono za punktem P_2 aż do Q_2 - punktu przecięcia z okręgiem C_2 . Prosta styczna do C_2 w Q_2 przecina się w punkcie X z prostą styczną do C_1 w P_1 . Prosta styczna do C_2 przechodząca przez X , ale nie przechodząca przez Q_2 jest styczna do C_2 w punkcie Q_1 . Wykaż, że P_1X leży na dwusiecznej $Q_1P_1Q_2$.
- 25.** Ile co najmniej liczb należy wykreślić z iloczynu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99$, żeby ostatnia cyfra wyniku była 2?
- 26.** Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 2a^5 \\ x + y = a \end{cases}.$$