
V Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 3–7 listopada 2021

Liga zadaniowa – dzień 3.

- 15.** Mamy 1000 kadzi z sokiem z gumijagód. Wśród tych beczek jedna jest zatruta (ze zło jagód). Wśród społeczności misiów znalazło się 10 odważnych, które zdecydowały się poświęcić, aby odnaleźć zatrutą kadź. W ciągu dnia miś może spróbować soku z dowolnej liczby kadzi. Wynik (czy miś żyje, czy nie) można zobaczyć tylko 24 godziny po konsumpcji soku. Ile dni potrzeba, aby wykryć sok ze zło jagód?
- 16.** Liczba naturalna n jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby n . Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności. (*w tym zadaniu można dostać mniej o 1 lub 2 punkty za nadmiar przypadków*).
- 17.** Dane są współokręgowe punkty A, B, C, D takie, że $AB=BC=CD$. Punkt E jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów ACD i ABD . Oblicz miarę kąta ABC wiedząc, że AE i CD są równoległe.
- 18.** Wykazać, że dla $a, b \in (0, 1)$ prawdziwa jest nierówność $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$
- 19.** Na płaszczyźnie z ustalonym układem współrzędnych dany jest wielokąt wypukły, którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite. Dowieść, że podwojone pole tego wielokąta jest liczbą całkowitą.
- 20.** Udowodnić, że dla liczby naturalnej $n > 2$ liczba $n!$ jest sumą n różnych swoich dzielników.
- 21.** Dane są takie trzy liczby nieujemne a, b, c , że suma każdych dwóch jest nie mniejsza od pozostałej. Dowieść, że

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$