V Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 3–7 listopada 2021

Liga zadaniowa – dzień 2.

8. Niech a będzie daną liczbą rzeczywistą. Rozwiąż równanie

$$|x-1|+|x|+|x+1|=a.$$

9. Czy istnieje wielościan o dokładnie siedmiu krawędziach?

10. Dana jest liczba rzeczywista a i funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniająca nierówność

$$f(n) \leq f\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + f\left(\left\lceil \frac{7n}{10} \right\rceil\right) + an.$$

Udowodnij, że istnieje taka stała c, że $f(n) \leq cn$.

11. Dany jest czworokąt $ABCD$, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym w punkcie X. Niech k, ℓ, m, n będą prostymi przechodzącymi przez punkt X prostopadłymi odpowiednio do boków AB, BC, CD, DA. Udowodnij, że wszystkie 8 punktów przecięcia prostych k, ℓ, m, n z bokami czworokąta leży na jednym okręgu.

12. Udowodnij, że jeżeli równanie

$$x^4 + ax + b = 0$$

ma dwa równe pierwiastki, to zachodzi równość

$$\left(\frac{a}{4}\right)^4 = \left(\frac{b}{3}\right)^3.$$

13. Każdy punkt płaszczyzny kolorujemy na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieje odcinek długości 1, którego końce mają ten sam kolor.

14. Marcel chce sprawdzić błyskotliwość swoich znajomych. W tym celu wziął talię 52 kart i wybrał 5 z nich. Powiedział Łukaszowi: „Zaraz dam Ci 5 kart. Jedną z tych kart odłożysz na bok, a pozostałe cztery dasz mi w ustalonej przez siebie kolejności. Tę czwórkę kart zaniosę Bartkowi, który będzie musiał odgadnąć odłożoną przez Ciebie wcześniej kartę.”

Teraz Łukasz może naradzić się z Bartkiem. Czy zawsze mogą popisać się swoją błyskotliwością przed Marcelem? (=czy Bartek może odgadnąć kartę Łukasza niezależnie od wyboru 5 kart przez Marcela?)