

---

# V Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 3–7 listopada 2021

## Liga zadaniowa – dzień 1.

---

1. Niech  $p > 3$  będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że  $p^2 - 1$  jest podzielne przez 24.
2. Udowodnić, że dla każdych rzeczywistych liczb  $a, b$  zachodzi

$$a^2 + b^2 + 1 \geq a + b + ab.$$

3. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12} \\ x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

4. Rozważamy te dziesięciocyfrowe liczby, w których każda z dziesięciu cyfr:  $0, 1, \dots, 9$  występuje dokładnie raz. Udowodnij, że wśród tych liczb jest co najmniej 50000 liczb podzielnych przez 11.
5. Wyznacz wszystkie takie pary  $(a, b)$  dodatnich liczb całkowitych, że liczba  $a + b$  jest liczbą pierwszą oraz liczba  $a^3 + b^3$  jest podzielna przez 3.
6. Dowieść, że stosunek sumy środkowych każdego trójkąta do jego obwodu zawiera się w przedziale  $(\frac{3}{4}, 1)$ .
7. Trzysta osób siedzi przy okrągłym stole. Część z nich to rycerze zawsze mówiący prawdę, a część to szalbierze, którzy zawsze kłamią. Antek zadał każdemu z nich pytanie: "ilu szalbierzy siedzi obok ciebie?", a następnie zsumował wszystkie odpowiedzi. Później Bartek zrobił to samo. Każda z udzielanych odpowiedzi była: 0, 1 lub 2. Czy Antek mógł uzyskać sumę o 410 większą od sumy Bartka?