## IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

# Teoria liczb i funkcje arytmetyczne

O ile nie napisano inaczej, w poniższych zadaniach wszystkie zmienne są liczbami naturalnymi.

**1.** Sprawdź, że funkcja multiplikatywna jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości na potęgach liczb pierwszych. Sprawdź, że dla multiplikatywnej i arytmetycznej funkcji $f$ mamy $f(1) = 1$.

**2.** Udowodnij, że $\tau(n)$ jest liczbą nieparzystą wtw., gdy $n$ jest kwadratem.

**3.** Udowodnij, że $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

**4.** Udowodnij następującą równość:

$$\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)/2}.$$

**5.** Niech $T(n) = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n)$. Udowodnij, że dla dowolnego $n$ zachodzi

$$T(n) = \left[\frac{1}{n}\right] + \left[\frac{2}{n}\right] \cdots + \left[\frac{n}{n}\right],$$

gdzie $[x]$ to część całkowita z liczby $x$.

**6.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby $n$ zachodzi

$$\frac{\sigma(1)}{1} + \frac{\sigma(2)}{2} + \cdots + \frac{\sigma(n)}{n} \leq 2n.$$

**7.** Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb $n$ takich, że $\tau(n)|n$.

**8.** Udowodnij, że $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą dla $n \geq 3$.

**9.** Udowodnij, że jeżeli $m|n$, to $\varphi(m)|\varphi(n)$.

**10.** Udowodnij, że jeżeli $\varphi(n)|n$, to jedyne liczby pierwsze występujące w rozkładzie $n$ to 2 i 3.

**11.** Udowodnij, że jeżeli $\sigma(n)$ jest potęgą (naturalną) dwójki, to $\tau(n)$ także jest potęgą (naturalną) dwójki.

**12.** Udowodnij, że splot Dirichleta jest działaniem łącznym i przemiennym.

**13.** Pokaż, że następująca funkcja jest elementem neutralnym splotu:

$$e(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, n > 1 \end{cases}$$

**14.** Pokaż kilka własności splotu:

(a) $\mathbf{1} * \mathbf{1} = \tau$, gdzie $\mathbf{1}(n) = 1$ dla każdego $n$,

(b) $I * \mathbf{1} = \sigma$, gdzie $I(n) = n$,

---

Materiały przygotował: Marcin Sidorowicz.

(c) $\phi * \mathbf{1} = I$,
(d) $\mu * \mathbf{1} = e$,
(e) $\tau * \varphi = \sigma$.

**15.** Niech $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ będzie rozkładem $n$ na czynniki pierwsze. Zdefiniujmy $\lambda(n) = (-1)^{e_1+e_2+\cdots+e_k}$ oraz $\lambda(1) = 1$. Pokazać, że $(\lambda * \mathbf{1})(n)$ jest równa 1 dla $n$ będących kwadratami, a 0 w przeciwnym przypadku.

**16.** Niech $\lambda$ będzie funkcją jak w poprzednim zadaniu. Przez $\sigma_+(n)$, $\sigma_-(n)$ oznaczmy sumy tych dzielników liczby $n$, na których funkcja $\lambda$ przyjmuje wartości odpowiednio $+1$ lub $-1$. Udowodnić, że $f(n) = \sigma_+(n) - \sigma_-(n)$ jest multiplikatywna.

**17.** Niech $i(n)$ oznacza iloczyn wszystkich naturalnych dzielników $n$. Czy istnieją dwie liczby $m \neq n$ takie, że $i(m) = i(n)$? *Wskazówka: zadanie 4.*