IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Indukcja matematyczna

We wszystkich zadaniach $n \in \mathbb{N}$, jeżeli nie napisano inaczej. Przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$.

1. Udowodnij następujące równości:
(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
(d) $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$
(e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
(f) $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \frac{3n^2+n}{2}$

2. Udowodnij, że dla każdego $n \geq 5$ zachodzi $2^n > n^2 + n + 1$.

3. Pokaż, że zasada indukcji matematycznej jest równoważna następującej regule: *każdy niepusty podzbiór liczb naturalnych zawiera element najmniejszy*.

4. Udowodnij następujące podzielności:
(a) $5 | n^5 - n$
(b) $13 | 4^{2n+1} + 3^{n+2}$
(c) $19 | 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$
(d) $133 | 11^{n+1} + 12^{2n-1}$

5. Udowodnij nierówność Bernoulliego: $(1+x)^n > 1+nx$ dla rzeczywistych $x > -1$, $x \neq 0$.

6. Niech F_n oznacza n-tą liczbę Fibonacciego, tzn. $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Dla $n \in \mathbb{N}$ udowodnij następujące równości:
(a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
(b) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
(c) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
(d) $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$
(e) $F_1 F_2 + F_2 F_3 + \cdots + F_{2n-1} F_{2n} = F_{2n}^2$

7. Udowodnij, że każde dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze (tj. $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$).

8. Udowodnij tzw. wzór Bineta:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

(lub inaczej: $F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$, gdzie $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = 1 - \phi = -\frac{1}{\phi}$).

9. Pewne zdanie o liczbach naturalnych $T(n)$ jest prawdziwe dla $n = 1$. Ponadto wiemy, że z prawdziwości $T(n)$ wynika prawdziwość zdań $T(n+2)$ oraz, dla $n \geq 4$, $T(n-3)$. Czy $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego n?

Materiały przygotował: Marcin Sidorowicz.

10. Pewne zdanie o liczbach naturalnych $T(n)$ jest prawdziwe dla $n = 1$. Ponadto wiemy, że z prawdziwości $T(n)$ wynika prawdziwość zdań $T(2n)$ oraz, dla $n \geq 6$, $T(n-5)$. Czy $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego n?

11. Rozważmy ponownie zadanie 9. Czy $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego n, jeżeli założymy dodatkowo, że $T(5)$ jest prawdziwe?

12. Na ile najwięcej części (w tym tych nieograniczonych) może podzielić płaszczyznę n prostych?

13. (*) Na ile najwięcej części (w tym tych nieograniczonych) może podzielić trójwymiarową przestrzeń n płaszczyzn?

14. Udowodnij, że dla każdego n istnieje liczba, którą można przedstawić jako sumę k kwadratów liczb całkowitych dla każdego $k \leq n$.

15. Udowodnij nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną: dla $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ zachodzi

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Wskazówka: Najpierw udowodnij dla $n = 2$. Następnie pokaż krok indukcyjny $n \to 2n$. Na koniec pokaż krok $n \to k < n$.

Przypomnienie: symbol Newtona $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dla $k, n \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$ to liczba sposobów na wybranie k rozróżnialnych elementów spośród n-elementowego zbioru.

16. (*) Udowodnij, że zachodzi

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

17. Udowodnij, że każdą kwotę n zł dla $n \geq 4$ można wydać używając jedynie dwuzłotówek i pięciozłotówek.

18. Udowodnij, że n-elementowy zbiór ma dokładnie 2^n podzbiorów.

19. Udowodnij, że jeżeli dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ liczba $x + \frac{1}{x}$ jest całkowita, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $x^n + \frac{1}{x^n}$ także jest całkowita.

20. (*) Dla $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ udowodnij tzw. wzór de Moivre'a:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

Uwaga: mimo, że do interpretacji tego twierdzenia przydaje się intuicja o liczbach zespolonych, jego udowodnienie nie jest trudne. Wystarczy znać odpowiednie wzory trygonometryczne i pamiętać, że $i^2 = -1$.