IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Wielomiany - zadania

1. Dany jest wielomian $P(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2$. Niech $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$ będzie wielomianem określonym wzorem $Q(x) = P(x) \cdot P(x^3) \cdot P(x^9) \cdot P(x^{27}) \cdot P(x^{81})$. Oblicz sumę $|b_0| + |b_1| + |b_2| + ... + |b_m|$.

2. [50OM] Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ mające dokładnie n pierwiastków nie większych niż -1 oraz spełniające warunek

$$a_0^2 + a_1a_n = a_n^2 + a_0a_{n-1}.$$

3. [54OM] Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x + y$ jest liczbą wymierną, to $W(x) + W(y)$ jest liczbą wymierną.

4. Niech a, b, c będą trzema różnymi pierwiastkami wielomianu $P(x) = 3x^3 - 3x + 1$. Znaleźć sumę kwadratów współczynników wielomianu $Q(x) = (x - a^2)(x - b^2)(x - c^2)$.

5. [55OM] Niech c będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - c$ ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Wyznaczyć, w zależności od c, sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2).$$

6. Znajdź wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające $xW(x-1) = (x-2)W(x)$.

7. Wielomian W stopnia n spełnia dla każdego $i = 0, ..., n$ równość $W(i) = \frac{i}{i+1}$. Znajdź wartość $W(n+1)$.

8. [48OM] Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunek

$$P(k) = \frac{1}{k} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 4, 8, ..., 2^n.$$

Obliczyć $P(0)$.

9. [48OM] Dana jest liczba naturalna $m \geq 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x) + 5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.

10. [57OM] Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1x + c_0$, gdzie każda z liczb $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1.

11. Wielomian W daje z dzielenia przez $x - 1$ resztę 1, a z dzielenia przez $x - 2$ resztę 2. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu W przez $(x-1)(x-2)$.

12. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{1000}$ przez $V(x) = x^2 - 3x + 2$.

13. Czy metoda użyta do rozwiązania poprzedniego zadania zadziała dla $V(x) = x^2 - 2x + 1$? A dla $V(x) = x^2 + 1$?

14. Znajdź wielomian możliwie najniższego stopnia, który przy dzieleniu przez $x^2 + 1$ daje resztę x, a przy dzieleniu przez $x^2 - 1$ — resztę 1.

15. Znajdź $\mathrm{NWD}(W(x), V(x))$, gdzie $W(x) = x^4 + x^2 + x - 1$, $V(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$. Znajdź $P(x)$ i $Q(x)$ takie, że $\mathrm{NWD}(W(x), V(x)) = P(x)W(x) + Q(x)V(x)$.

16. Znaleźć wielomian o współczynnikach całkowitych najniższego możliwie stopnia, którego pierwiastkiem jest liczba $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

17. [47OM] Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

18. [47OM] Wyznaczyć wszystkie pary (n, r), gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, r zaś liczbą rzeczywistą, dla których wielomian $(x+1)^n - r$ jest podzielny przez wielomian $2x^2 + 2x + 1$.

19. [46OM] Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli liczba $P(5)$ dzieli się przez 2, a liczba $P(2)$ dzieli się przez 5, to liczba $P(7)$ dzieli się przez 10.

20. Wykaż, że dla każdego wielomianu $P(x) \not\equiv x$ wielomian $P(P(P(x))) - x$ dzieli się przez $P(x) - x$.

21. [54OM] Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek: dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez $W(n)$.

22. Niech f bedzie wielomianem stopnia $n \geq 1$ o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeżeli dla co najmniej $2n + 1$ różnych wartości całkowitych a liczba $|f(a)|$ jest liczbą pierwszą lub równą 1, to wielomian f nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

Materiały przygotował: Marcin Preisner.

23. [49OM] Niech $g(k)$ będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby całkowitej k, gdy $|k| > 2$, oraz niech $g(-1) = g(0) = g(1) = 1$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian W stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych, dla którego zbiór liczb postaci $g(W(x))$ (x — całkowite) jest skończony.

24. [55OM] Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), W_3(x), ..., W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby $W_1(a)$, $W_2(a)$, $W_3(a)$, ..., $W_n(a)$ są złożone.

25. [55OM] Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), W_3(x), ..., W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby $W_1(a)$, $W_2(a)$, $W_3(a)$, ..., $W_n(a)$ są złożone.

26. [48OM] Dana jest liczba naturalna $m \geq 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x) + 5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.

27. [57OM] Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2+ax+b)\cdot P(x)$ jest wielomianem postaci $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1x + c_0$, gdzie każda z liczb $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1.

28. Załóżmy, że wielomian $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ ma n pierwiastków. Wyraź
(a) sumę kwadratów pierwiastków;
(b) sumę trzecich potęg pierwiastków;
(c) sumę odwrotności pierwiastków
za pomocą $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$.

29. [52OM] Niech $n - 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci

$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-5}x^{n-5} + ... + a_1x + a_0,$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników rzeczywistych $a_0, a_1, ..., a_{n-3}$ jest różny od zera, ma mniej niż n pierwiastków rzeczywistych.

30. Udowodnij, że jeśli wielomian $W(x)$ jak wyżej ma n pierwiastków rzeczywistych, to $a_{n-2} \leq \frac{n-1}{2n}a_{n-1}^2$.

31. O których z poniższych wielomianów potrafisz rozstrzygnać, że są nierozkładalne bezpośrednio stosując kryterium Eisenteina:

$$x^4 + 6x^2 - 18x + 12, \quad x^4 + 21x^3 - 3x^2 + 49, \quad x^5 - 10x^2 + 50.$$

32. Udowodnij, że wielomian $1 + x + x^2 + ... + x^{p-1}$ nie rozkłada się na iloczyn dwóch wielomianów, które mają stopnie dodatnie i współczyniki całkowite.

33. Znaleźć wielomian o współczynnikach całkowitych najniższego możliwie stopnia, którego pierwiastkiem jest liczba: $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{3} - \sqrt{7}$, $d = \sqrt[3]{2 + \sqrt{6}}$, $e = \sqrt{3 - \sqrt[4]{3}}$, $f = \sqrt[5]{7}$, $g = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

34. [47OM] Rozstrzygnąć, czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych jest sumą trzecich potęg wielomianów o współczynnikach całkowitych.

35. [51OM] Wielomian $w(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla liczb całkowitych x wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Dowieść, że wielomian $w(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

36. [53OM] Dowieść, że wykres wielomianu $W(x)$ stopnia większego od 1 ma oś symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$, że $W(x) = F(G(x))$, przy czym $G(x)$ jest stopnia 2.

37. [54OM] Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x$. Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb całkowitych a, b spełniajacych równanie $W(a) = W(b)$.

38. [55OM] Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych, dla których wielomian W przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.

39. [56OM] Dany jest wielomian $W(x) = x^2 + ax + b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek: *Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p.* Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której $W(m) = W(m + 1) = 0$.

40. [58OM] Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje w przedziale $\langle a; b\rangle$ (gdzie $a < b$) tylko wartości dodatnie. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany P oraz $Q_1, Q_2, ..., Q_m$, że

$$W(x) = (P(x))^2 + (x - a)(b - x)\sum_{i=1}^{m}(Q_i(x))^2$$

dla każdej liczby rzeczywistej x.

41. [58OM] Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.