IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Wielomiany

Wielomianem nazywamy funkcję postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Zwykle zakładamy, że $a_n \neq 0$ i mówimy wtedy, że stopień W jest równy n ($\deg(W) = n$). Liczby a_n nazywamy współczynnikami, x jest zmienną rzeczywistą (choć w przyszłości będziemy mogli rozważać zmienne zespolone i inne). Współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym. Pierwiastkiem jest liczba x, taka że $W(x) = 0$. Wielomiany łatwo można dodawać, odejmować, mnożyć. Możliwe jest też dzielenie z resztą (ale o tym trochę później).

1. Współczynniki i pierwiastki

Możliwe, że najważniejszym twierdzeniem dotyczącym wielomianów jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *[Bézout] Liczba a jest pierwiastkiem $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(x) = (x-a)P(x)$ dla pewnego wielomianu $P(x)$.*

Z powyższego twierdzenia wynikają kluczowe własności wielomianów:

- wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków,
- jeśli wielomian $W(x)$ stopnia $\leq n$ ma $n+1$ pierwiastków, to $W(x) = 0$,
- jeśli dwa wielomiany stopnia co najwyżej n zgadzają się w $n+1$ punktach, to są sobie równe.
- jeśli wielomian stopnia n ma mieć n pierwiastków $x_1, ..., x_n$, to

$$W(x) = a(x - x_1)...(x - x_n).$$

2. Wielomiany przechodzące przez zadane punkty

Wielomian stopnia n jest zadany przez $n+1$ punktów przez które przechodzi. Dokładniej, to znaczy że jeśli wiemy że wielomian stopnia $\leq n$ przechodzi przez punkty

$$(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n), \quad x_i \neq x_j, i \neq j,$$

to jest tylko jeden taki wielomian. Odwrotnie, jeśli dane jest takie $n+1$ punktów, to istnieje wielomia stopnia co najwyżej n, który przez nie przechodzi.

Zauważmy, że wielomian

$$W_1(x) = y_1 \frac{(x - x_2)...(x - x_n)}{(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)}$$

spełnia $W_1(x_1) = y_1$ oraz $W_1(x_i) = 0$ dla $i = 2, ..., n$. Z takich wielomianów łatwo zbudować wielomian przechodzący przez n zadanych punktów powyżej ($W(x) = W_1(x) + ... + W_n(x)$).

3. Dzielenie wielomianów

Mówimy, że $W(x)$ jest podzielny przez $V(x)$, jeśli istnieje wielomian $P(x)$ taki, że $W(x) = V(x)P(x)$. Ogólniej, każdy wielomian $W(x)$ można podzielić (jednoznacznie) przez $V(x) \neq 0$ otrzymując wynik $P(x)$ i resztę $R(x)$, takie że:

- $W(x) = P(x)V(x) + R(x)$,
- stopień $R(x)$ jest ściśle mniejszy niż stopień $V(x)$.

Dzielenie wielomianów ma podobne własności do dzielenia liczb całkowitych. W szczególności możemy zdefiniować $\mathrm{NWD}(P,Q)$ i $\mathrm{NWW}(P,Q)$ dla dwóch wielomianów P i Q (przez "największy" i "najmniejszy" rozumiemy stopień wielomianu nie przejmując, tym że jest to wyznaczone z nie do końca jednoznacznie, tzn. $\mathrm{NWD}(x^2 - 1, x^3 - 1) = x - 1$, ale równie dobrze wynik mógłby być $2x - 2$).

Materiały przygotował: Marcin Preisner.

4. Wzory Viete'a

Zakładając, że wielomian stopnia n ma n pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami) możemy zawsze napisać:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)...(x - x_n).$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach, otrzymujemy wzory Viete'a:

$$x_1 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$...$$

$$x_1x_2...x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

5. Pochodne

Pochodną wielomianu $W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ jest wielomian

$$W'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1.$$

To jest operacja czysto algebraiczna - zmieniamy wielomian na wielomian. Można sprawdzić, że

$$(W(x)P(x))' = W'(x)P(x) + W(x)P'(x).$$

Niech $W^{(k)}(x)$ oznacza k-tą pochodną.

Twierdzenie 2. *Liczba t jest pierwiastkiem stopnia k wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$W(t) = W'(t) = ... = W^{(k)}(t) = 0, W^{(k+1)}(x) \neq 0.$$

6. Rozkładalność wielomianów

Twierdzenie 3. *[Zasadnicze Twierdzenie Algebry] Każdy wielomian zespolony (zmienna zespolona i współczynniki zespolone) ma pierwiastek zespolony.*

Jako wniosek z powyższego twiedzenia wiemy, że wielomiany zespolone zawsze rozkładają się tak:

$$W(z) = a(z - z_1)...(z - z_n).$$

Używając tego (zespolonego) twierdzenia dostajemy fakt dotyczący wielomianów rzeczywistych.

Twierdzenie 4. *Każdy wielomian rzeczywisty rozkłada się na wielomiany o stopniach 1 i 2.*

Twierdzenie 5. *[Kryterium Eisensteine'a] Dany jest wielomian o współczynnikach całkowitych $W(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$. Jeśli istnieje liczba pierwsza p taka, że:*

$$p \nmid a_n, p|a_{n-1}, p|a_{n-2}, ..., p|a_1, p|a_0, p^2 \nmid a_0,$$

to wielomianu $W(x)$ nie da się przedstawić jako iloczyn dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych stopni niższych niż $\deg(W)$.

7. Wzory na pierwiastki

Twierdzenie Abela: nie ma wzorów na pierwiastki wielomianów stopnia większego niż 4. Dla stopnia 2 jest to znany wzór z „deltą", dla stopnia 3 i 4 — wzory Cardano (współpraca: Ferrari, del Ferro, Tartaglia; XVI wiek).