Bardo, październik 2019

IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Układy równań

Dodawanie i odejmowanie stronami.

1. Rowiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = y + z + 2 \\ y^2 = z + x + 2 \\ z^2 = x + y + 2 \end{cases}$$

2. Rozwiązać w liczbach nieujemnych układ równań:

$$\begin{cases} y^3 = x^2 + x - 1 \\ z^3 = y^2 + y - 1 \\ x^3 = z^2 + z - 1 \end{cases}$$

3. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych (dodatnich) układ równań:

$$\begin{cases} x^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ y^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \\ z^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \end{cases}$$

Wskazówka: dodać stronami i zwinąć. Rozważyć, czy któraś ze zmiennych może być mniejsza niż 3.

Podstawienia.

4. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1 \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9 \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 9 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 9 \end{cases}$$

5. Wyznacz liczbę rozwiązań układu w zależności od wartości parametru $a \in \Re$

$$\begin{cases} x + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z = a \end{cases}$$

Wskazówka: Podstawiamy $x = u + \frac{1}{2},\ y = v + \frac{1}{2},\ z = w + \frac{1}{2}$.

6. Niech $n \geq 3$. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych nieujemnych układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ \vdots \\ x_n + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

Największa/najmniejsza.

7. Liczby dodatnie a, b, c, d są rozwiązaniem układu:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3 \\ b^4 + c^4 + d^4 = 3a^4 \\ c^5 + d^5 + a^5 = 3b^5 \end{cases}$$

Udowodnić, że: $a = b = c = d$.

Materiały przygotował: Marcin Preisner.

8. Dla $n \geq 3$ roziąż w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} x_1^3 = x_2 + x_3 + 1 \\ x_2^3 = x_3 + x_4 + 1 \\ \vdots \\ x_n^3 = x_1 + x_2 + 1 \end{cases}$$

Wzory Viete'a.

9. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

10. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 14 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 20 \end{cases}$$

Cykliczne.

11. Dany jest układ równań z niewiadomymi $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \vdots \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Niech $\gamma = (b-1)^2 - 4ac$. Udowodnić, że:

(a) Jeżeli $\gamma < 0$, to układ nie ma rozwiązań rzeczywistych;
(b) Jeżeli $\gamma = 0$, to układ ma jedno rozwiązanie rzeczywiste;
(c) Jeżeli $\gamma > 0$, to układ ma więcej niż jedno rozwiązanie rzeczywiste.

12. Rozstrzygnąć dla jakich naturalnych $n \geqslant 2$ układ równań:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2 \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3 \\ \vdots \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1 \end{cases}$$

ma rozwiązania w liczbach całkowitych $x_1, x_2, ..., x_n$.
Wsk: Znaleźć wszystkie punkty o współrzędnych całkowitych okręgu zadanego przez jedno równanie i wywnioskować, że: $3|n$.

13. Wyznaczyć liczbę rozwiązań układu w liczbach rzeczywistych dodatnich $(n \geqslant 2)$

$$\begin{cases} x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n^2 = 4x_n \end{cases}$$

Jednorodność.

14. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \in \mathbb{R}$ rozwiąż układ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = a^2 \\ x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = a^3 \\ \vdots \\ x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = a^n \end{cases}$$