IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Niezmienniki

1. Bierzemy liczbę 2019!. Obliczamy sumę jej cyfr, następnie obliczamy sumę cyfr powstałej liczby, i tak dalej, aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Jaka to liczba?

2. Na każdym polu szachownicy 11x11 leży moneta. Każdą monetę przesuwamy raz, na dowolne sąsiadujące z nią pole. Pokaż, że po tej operacji przynajmniej jedno pole stanie się puste.

3. Na tablicy jest zapisane 10 znaków $+$ i 15 znaków $-$. W jednym ruchu ścieramy dwa dowolne znaki i dopisujemy $+$, jeżeli starte znaki były takie same, i $-$, jeżeli starte znaki były różne. Po 24 ruchach na tablicy zostanie jeden znak. Jaki?

4. Czy kostkami domina o wymiarach 1x2 można pokryć szachownicę 8x8 bez dwóch przeciwległych narożników?

5. Czy klockami o wymiarach 1x4 można pokryć szachownicę 6x6?

6. Przy okrągłym stole siedzi 14 rycerzy. Na początku jeden z rycerzy ma 14 złotych monet. W dowolnym momencie rycerz, który posiada przynajmniej dwie monety może wziąć dwie z nich i rozdać po jednej każdemu rycerzowi siedzącemu obok niego. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie każdy rycerz będzie miał po jednej monecie?

7. Przy innym okrągłym stole siedzi kolejnych 14 rycerzy. Tym razem na początku każdy ma po jednej monecie. W jednym ruchu jeden rycerz przekazuje jedną monetę swojemu sąsiadowi z lewej, a inny - jedną monetę sąsiadowi z prawej. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie pewien rycerz będzie miał 14 monet?

8. Na pewnej wyspie żyje 13 żółtych, 15 zielonych i 17 czerwonych kameleonów. Kiedy spotkają się dwa kameleony różnego koloru, oba zmieniają kolor na trzeci. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie wszystkie kameleony na wyspie będą miały ten sam kolor?

9. Ruch w grze prowadzonej na szachownicy 8x8, początkowo pokolorowanej w standardowy sposób, polega na wybraniu prostokąta o bokach różnej parzystości i zamianie koloru pól w jego wnętrzu na przeciwny. Czy może się tak zdarzyć, że na pewnym etapie gry wszystkie pola poza jednym będą białe?

10. Hydra ma 2019 głów. Dzielny rycerz jednym cięciem miecza może uciąć jej 17, 23, 56 lub 1 głowę. Po cięciu odrasta jej odpowiednio 11, 29, 0 lub 349 głów. Czy dzielny rycerz może pokonać hydrę?

Materiały przygotował: Michał Kucharczyk.

11. Wokół okrągłego stołu siedzi 30 gości. Kelner dał swoim kolegom, siedzącym na miejscach o numerach 1 i 3, po cukierku. Następnie chodzi wokół stołu, wybiera dowolne dwie osoby siedzące obok siebie i im obu też daje po cukierku. Czy chodząc w ten sposób wystarczająco długo, może doprowadzić do stanu, w którym wszyscy będą mieli tyle samo cukierków?

12. Na tablicy zapisany jest ciąg liczb $\{1, 2, 3, ..., 2019\}$. W jednym ruchu zamieniamy miejscami dwie sąsiednie liczby. Czy w parzystej liczbie ruchów jesteśmy w stanie uzyskać ciąg $\{2019, 2018, ..., 1\}$?

13. W każdym polu szachownicy mn zapisano jedną liczbę rzeczywistą. Możemy wykonać następującą operację: zmieniamy znaki wszystkich liczb stojących w jednym, wybranym przez nas wierszu lub w wybranej przez nas kolumnie. Czy zawsze można, przy pomocy skończonej liczby operacji, doprowadzić do sytuacji, w której suma liczb stojących w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest nieujemna?

14. Na okręgu napisano n liczb naturalnych. Między każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej zapisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi n liczbami postępujemy analogicznie. Udowodnić, że po pewnej, skończonej liczbie takich operacji wszystkie liczby na okręgu będą równe

15. Na płaszczyźnie danych jest 2n punktów. Udowodnić, że można tak narysować n odcinków, aby każdy punkt był końcem pewnego odcinka oraz by odcinki nie przecinały się.

16. Czy klockami typu L (klocek przykrywa 4 pola) można pokryć szachownicę 10x10?

17. Czy klockami 1x7 i 1x9 można pokryć szachownicę 11x11?

18. Czy klockami 1x7 i 1x9 można pokryć szachownicę 12x12?