IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Kombinatoryka

1. Rzucamy trzy razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?

2. Ile, niekoniecznie mających znaczenie, słów można ułożyć ze słowa KRAM używając wszystkich czterech liter? Używając dowolnej ilości liter?

3. Ile, niekoniecznie mających znaczenie, słów można ułożyć ze słowa MATEMATYKA używając wszystkich czterech liter? Używając dowolnej ilości liter?

4. W wyścigu startuje 9-tu zawodników. Ile jest możliwych klasyfikacji końcowych (zakładamy, że wszyscy dojechali)?

5. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7?

6. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3 i 4?

7. Ile jest liczb mniejszych od 1000 podzielnych przez 3, 4, ale nie przez 5?

8. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których 3 nie występuje po 4?

9. Ile jest uścisków dłoni gdy wita się 10 osób?

10. Na ile sposobów można posadzić 150 rycerzy przy okrągłym stole?

11. Ile różnych dzielników ma liczba $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$?

12. Ile podzbiorów ma zbiór 1, 2, 3, 4, 5?

13. Ile podzbiorów ma zbiór n-elementowy?

14. Wybieramy z klasy 20-osobowej przewodniczącego, zastępcę i skarbnika. Na ile sposobów możemy to zrobić?

15. Ile jest sposobów rozmieszczenia k osób w n-osobowej sali?

16. W olimpiadzie w Vancouver bierze udział 50 biathlonistów. Ile jest możliwych układów na podium? A co jeśli pierwsi trzej zawodnicy (lub zawodniczki!) wygrali ex aequo?

17. Wybieramy z klasy 40-osobowej 9-osobową delegację. Na ile sposobów możemy to zrobić?

18. Ile podzbiorów k-elementowych ma zbiór n-elementowy?

19. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia szóstki w Totolotku?

20. (*) Mamy przejść szachownicę n x k z jednego wierzchołka do przeciwnego poruszając się skokami po bokach pól. Ile jest możliwych dróg?

21. Ile jest podziałów 20-elementowego zbioru na cztery podzbiory 5-elementowe jeśli czwórka jest uporządkowana? Nieuporządkowana?

Materiały przygotował: Michał Kucharczyk.

22. Ile jest sposobów zapisania liczby 2400 jako sumy pięciu liczb naturalnych ($\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$)?

23. Ile jest sposobów zapisania liczby 2400 jako sumy pięciu liczb naturalnych ($\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$)?

24. (OM I) Narysowano k prostych równoległych i przecięto je n prostymi równoległymi. Ile powstało równoległoboków?

25. (OM I) n prostych leżących na płaszczyźnie, z których każde dwie przecinają się, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ części.

26. (OM III) Iloma sposobami można zbiór n przedmiotów podzielić na dwa zbiory?

27. (OM III) Udowodnić, że wszystkie podzbiory zbioru skończonego można ustawić w ciąg, którego kolejne wyrazy różnią się jednym elementem.

28. Udowodnij wzory (odpowiednio je interpretując):

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$(*) \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$