Bardo, październik 2019

IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Zadania przygotował: Mateusz Kandybo

Zadania z Kolorowania

Zadania Rozgrzewkowe

1. Zyzio ma standardową szachownicę (rozmiarów 8×8) z usuniętymi dwoma narożnymi polami: lewym górnym i prawym dolnym oraz paczkę 31 kostek domina (1×2). Czy może tak poukładać kostki domina, aby pokrywały one dokładnie całą szachownicę?

2. Tym razem Dyzio chce pokryć swoją szachownicę o wymiarach 8×8 z usuniętym polem narożnym przy użyciu prostokątnych kostek triomina (prostokąty o wymiarach 1×3). Czy jest w stanie to zrobić?

3. Dyziowi nie udało się ułożyć triomina na szachownicy (patrz poprzednie zadanie) i zaczął zastanawiać się, czy może usunąć jedno inne pole tak, aby mógł to zrobić. Czy można znaleźć takie pola? Jeśli tak, ile jest takich pól?

4. Podaj przykład figury (w jednym kawałku) złożonej z sześciu pól (czyli kwadratów jednostkowych), której nie da się pokryć kostkami domina, pomimo że przy standardowym kolorowaniu (czarnobiałym, pola sąsiadujące bokiem mają różne kolory) pól białych jest tyle samo, co czarnych.

Zadania Podstawowe

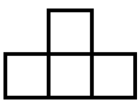
1. *(Matematyczne Seminarium Olimpijskie 1)* Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 klockami 1×4 w taki sposób, aby tylko środkowe pole nie było zakryte?

2. *(Trapez 78)* Kwadrat o boku 8 podzielono na 64 kwadraty jednostkowe zwane dalej polami. Ile prostokątów o wymiarach 1×5 potrzeba, aby pokryć cały kwadrat w taki sposób że każdy prostokąt pokrywa 5 pól? (W tym zadaniu zakładamy, że prostokąty mogą się pokrywać).

3. *(Trapez 88)* Czy kwadrat o boku 24 można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 2, 3 lub 5, przy czym kwadrat o boku 5 jest dokładnie jeden?

4. Czy kwadrat o boku 19 można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×13 i 1×16?

5. *(Obóz Naukowy OMG 2013, poziom OM)* Wyznacz wszystkie takie liczby całkowite dodatnie n, że szachownicę o boku n daje się rozciąć na kostki tetromina takie jak na przedstaione na rysunku poniżej.



Rysunek do zadania 5

6. Czy szachownicę o boku 2019 z wyciętym narożnikiem można pokryć przy użyciu ustawionych w pionie prostokątów o wymiarach 1×4 oraz ustawionych w poziomie prostokątów o wymiarach 1×3? A co gdyby wycięte zostało inne pole tej szachownicy?

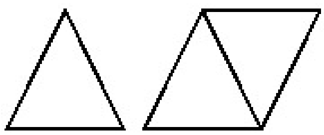
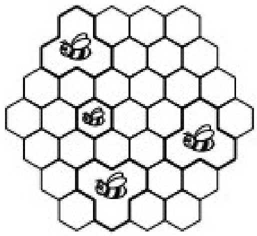
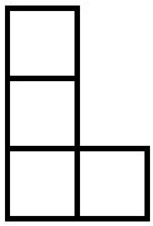
7. Czy szachownicę o boku 2017 można pokryć przy użyciu kwadratów o boku 2 i kwadratów o boku 3?

8. *(Obóz Naukowy OMG 2013, poziom OMG)* Dana jest szachownica o wymiarach 2014×2014. Czy można tak ją pokryć kostakmi domina, aby liczba kostek ułożonych poziomo była równa liczbie kostek ułożonych pionowo?

9. *(Obóz Naukowy OMG 2012, poziom OM)* Dany jest sześcian $8 \times 8 \times 8$. Czy używając 64 pasków papieru o wymiarach 1×3 można pokryć trzy jego ściany o wspólnym wierzchołku?

10. *(Obóz naukowy OMG 2014, poziom OMG)* Mamy do dyspozycji płytki o następujących kształtach (każdy z narysowanych odcinków ma długość 1, patrz rysunek poniżej). Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wyznacz najmniejszą liczbę płytek potrzebną do ułożenia trójkąta równobocznego o boku n.

11. *(Náboj 2016)* Trzynaście pszczół: pszczółka Maja i dwanaście dużych pszczół mieszka na plastrze miodu składającym się z 37 komórek. Każda duża pszczoła zajmuje trzy parami sąsiednie komórki, a Maja zajmuje dokładnie jedną komórkę (tak jak na rysunku). Na ile sposobów możemy pocielić plaster miodu na 13 rozłączynych części tak, żeby każda pszczoła zajęła dokładnie jedną część?

Rysunki do zadań 10, 11 i 12

12. Dana jest szachownica 2019×2019. Czy można ją pokryć przy użyciu prostokątów 1×4 oraz klocków L-tetromina (patrz rysunek powyżej), tak aby niezapełnione pozostało jedno pole znajdujące się w rzędzie o nieparzystym numerze i kolumnie o parzystym numerze?

13. *(Facebookowa Liga OMG)* Każde pole szachownicy 8×8 pomalowano na biało lub czarno. Okazało się, że w każdym kwadracie o wymiarach 3×3 złożonym z całych pól tej tablicy znajduje się parzysta liczba czarnych pól. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba białych pól w całej tablicy?

14. *(Obóz Naukowy OMG 2012, poziom OMG)* Na szachownicy 20×20 umieszczono 48 kwadratów 2×2 tak, że każdy pokrywa 4 pola. Wykaż, że na szachownicy można umieścić jeszcze jeden kwadrat 2×2 tak, by pokrywał 4 wolne pola.

15. *(Trapez 90)* Czy sześcian o krawędzi długości 19 można podzielić na bryły, z których każda jest sześcianem o krawędzi 2 lub prostopadłościanem o wymiarach $1 \times 3 \times 3$?

16. *(finał XI OMG)* Czy z 32 prostopadłościennych klocków o wymiarach $2 \times 3 \times 3$ można ułożyć prostopadłościan o wymiarach $8 \times 8 \times 9$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadania Trudniejsze

1. *(Obóz Naukowy OMG 2014, poziom OM)* Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 2^{2014} można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3 lub 5.

2. *(Trapez 91)* Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n niepodzielna przez $2, 3, 5$ ani 7, że sześcian o krawędzi n można podzielić na sześciany z których każdy ma krawędź $2, 3, 5$ lub 7?