Bardo, październik 2019

IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Statyka

1. Niech $A_1, B_1, ..., F_1$ będą środkami boków $AB, BC, ..., FA$ sześciokąta. Udowodnij, że trójkąty $A_1C_1E_1$ i $B_1D_1F_1$ mają wspólny środek ciężkości.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Niech K, L, M, N będą środkami boków AB, BC, CD, DA odpowiednio. Udowodnij, że wtedy punkt przecięcia odcinków KM i LN dzieli je na połowy. Ponadto wykaż, że jest to środek odcinka łączącego środki przekątnych tego czworokąta.

3. Na prostych BC, CA i AB wybrano takie punkty K, L, M, że $[AMB] = [BKC] = [CLA]$. Wówczas trójkąty ABC i KLM mają wspólny środek ciężkości.

4. Niech dany będzie skończony układ punktów materialnych U o niezerowej masie (sumarycznej). Każdy rozkład $U = U_1 \cup U_2$ na dwa rozłączne niepuste podukłady o niezerowych masach sumarycznych, wyznacza prostą G_1G_2, gdzie $G_1 = G(U_1), G_2 = G(U_2)$ są odpowiednimi środkami masy. Udowodnić, że wszystkie powstałe proste są współpękowe.

5. Udowodnij tw. Cevy korzystając z własności środka masy.

6. Danych jest n punktów na okręgu. Przez środek masy każdych $n-2$ spośród nich prowadzimy prostą prostopadłą do odcinka łączącego pozostałe 2 punkty. Udowodnij, że wszystkie te proste są współpękowe.

7. Udowodnić, że w dowolnym trójkącie zachodzi równość $|HO|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

8. Wykaż, że w dowolnym trójkącie odległość między środkami okręgu wpisanego i dopisanego wynosi $R^2 - 2rR$.

9. Pokaż, że jeśli a, b, c, d są długościami boków czworokąta, k, l długościami jego przekątnych, a e jest odległością między środkami przekątnych, to zachodzi równość: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k^2 + l^2 + 4e^2$.

10. Udowodnić **drugie tw. Lagrange'a**: Jeżeli całkowita masa $m(U)$ układu jest różna od zera, to moment bezwładności tego układu względem środka masy tego układu, wyraża się następującą formułą:

$$J_G(U) = \frac{1}{2m(U)} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} m_i m_j |A_i A_j|^2$$

11. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, $|AC| = |AB|$. Znajdź miejsce geometryczne punktów X takich, że $AX^2 = BX^2 + CX^2$.

Współrzędne barycentryczne

12. Udowodnić,że jeżeli $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$, to $\sigma(ABX) + \sigma(ADX) = \sigma(ACX)$.

13. Dany jest trójkąt ABC. Udowodnić, że dla dowolnego punktu X zachodzi równość $\sigma(XBC) + \sigma(AXB) + \sigma(ABX) = \sigma(ABC)$.

14. Udowodnić, że jeżeli A, B, C, D są takimi puktami, że $\vec{AB} + \vec{CD} \neq \vec{0}$, to dla dowolnej liczby c miejsce geometryczne $\{X : \sigma(ABX) + \sigma(CDX) = c\}$ jest prostą równoległą do wektora $\vec{AB} + \vec{CD}$.

15. Czworokąt jest opisany na okręgu. Udowodnij, że środek tego okręgu i środki przekątnych tego czworokąta leżą na jednej prostej.

Materiały przygotował: -—".

16. Dany jest trójkąt ABC i punkt X. Udowodnić, że jeżeli dla pewnych licz x_A, x_B, x_C zachodzi rónośc $x_A\vec{XA} + x_B\vec{XB} + x_C\vec{XC} = \vec{0}$, to istnieje taka stała λ, że

$$x_A = \lambda m_A, x_B = \lambda m_B, x_C = \lambda m_C$$

.

17. Załóżmy, że X, Y, Z mają współrzędne odpowiednio $[x_A, x_B, x_C], [y_A, y_B, y_C], [z_A, z_B, z_C]$. Udowodnić, że punkty X, Y, Z są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie stałe P, Q, że $z_A = Px_A + Qy_A, z_B = Px_B + Qy_B, z_C = Px_C + Qx_C$.

18. Znajdź współrzędne barycentryczne punktów szczególnych w trójkącie:
środka okręgu opisanego, środka okręgu wpisanego, ortocentrum, środka ciężkości, środków okręgów dopisanych, punktu Lemoine'a, punktu Nagela, punktu Gergonne'a.