IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Wielomiany

Wielomian to funkcja postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

pojęcia: *współczynniki wielomianu, pierwiastek wielomianu, stopień wielomianu, wielomian unormowany, twiedzenie Bezout, wzory Viete'a*

Twierdzenie [Bézout] Liczba x jest pierwiastkiem niezerowego wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomianu P, że $W(x) = (x - a)P(x)$.

wnioski

1. wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków,
2. jeśli dwa wielomiany stopnia co najwyżej n zgadzają się w $n + 1$ punktach, to są sobie równe.

zadania

1. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $a, b \in \mathbb{R}$, spełniające warunek $xf(x-1) = (x+1)f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

2. Udowodnić, że jeżeli f jest wielomianem stopnia $n > 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ to istnieje taki wielomian g stopnia $n - 1$, że zachodzi równość $f(x) = (x - \alpha)g(x) + f(\alpha)$.

3. Uzasadnić, że dla dowolnego wielomianu f o współczynnikach całkowitych i liczb całkowitych a, b zachodzi relacja podzielności $a - b \mid f(a) - f(b)$.

4. Udowodnić, że jeżeli wielomian $W \in \mathbb{Z}[X]$ przyjmuje dla pięciu różnych argumentów całkowitych wartość 2019, to nie ma on pierwiastków całkowitych.

5. Dane są trzy (parami różne) liczby a, b, c. Udowodnij, że

$$\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

6. Znajdź wszystkie wielomiany spełniające $(W(x))^2 = W(x^2)$.

7. Jeżeli liczba wymierna $\frac{h}{k}$ dana w postaci ułamka nieskracalnego jest pierwiastkiem wielomianu

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych, to $k \mid a_n$, a $h \mid a_0$.

8. Wyznaczyć resztę z dzielenia $x^{100} - 2x^{51} + 1$ przez $X^2 - 1$.

9. Wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ daje przy dzieleniu przez $x + 2$ resztę z dzielenia 3, a przy dzieleniu przez $x - 3$ resztę -2. Jaką resztę daje wielomia f przy dzieleniu przez $x^2 - x - 6$?

10. Dowieść, że jeżeli trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[X]$ ma pierwiastek wymierny, to co najmniej jedna z liczb a, b, c jest parzysta.

---

11. Dany jest wielomian $f(x) \in \mathbb{Z}[X]$. Udowodnić, że jeżeli dla czerech różnych argumentów całkowitych wartością tego wielomianu jest liczba 10, to $f(x) \neq 21$ dla każdej liczby całkowitej x.

12. Udowodnić, że jeżeli co najmniej jedna z liczb a, b jest wymierna, a suma $a + b$ i iloczyn ab są całkowite, to a i b są liczbami całkowitymi.

Materiały przygotował: Michał Dymowski.

13. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych spełniające równanie

$$W(a^2) - W(a) = W(b^2) - W(b)$$

dla wszystkich liczb $a, b \in \mathbb{R}$ spełniających warunek $a + b = 1$.

14. Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

15. Dodatnie liczby wymierne a i b spełniają równość $a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4$ Udowodnić, że liczba $\sqrt{a} - 1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

16. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej spełniona jest równość

$$W(x^2)W(x^3) = (W(x))^5.$$

17. Dane są takie liczby dodatnie, że $a^2 + b^2, a^3$ i b^3 są wymierne.
Udowodnić,że liczby a i b są wymierne.

18. Dane są liczby a, b, c gdzie $ac \neq bc$ i $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ponadto α_1, α_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + ax + bc$, a α_2, α_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + bx + ac$. Udowodnić, że wówczas α_1, α_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + cx + ab$.

19. Rozważmy równania kwadratowe postaci $x^2 + kx + n = 0$, gdzie k i n są liczbami całkowitymi. Podać przykład doboru współczyników n i k tak, że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej m równanie $x^2 + (k + m)x + (n + m) = 0$ miało dokładnie dwa różne rozwiązania całkowite.

20. Dany jest wielomian $F(x) = x^4 + 20x^3 + 121x^2 + 210x$. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite a, że $F(a)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

21. Wielomian

$$ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$$

o współczynnikach całkowitych ma 7 pierwiastków rzeczywistych. Wiadomo, że iloczyn ah jest liczbą nieparzystą, a iloczyn bcd jest liczbą parzystą. Udowodnić, że co najmniej jeden pierwiastek tego wielomianu jest liczbą niewymierną.

22. Dany jest wielomian $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ taki, że dla każdej pary liczb wymiernych a, b liczby $P(a), P(b)$ są różne. Rozstrzygnij, czy wynika z tego, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y liczby $P(x), P(y)$ są różne.

23. Udowodnić, że z odcinków $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi nierówność $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 > a^4 + b^4 + c^4$.

24. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ mające dokładnie n pierwiastków rzeczywistych nie większych niż -1 oraz spełniające warunek

$$a_0^2 + a_1a_n = a_n^2 + a_0a_{n-1}.$$

25. Niech $n - 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci

$$x^n + a_{n-3}x^n - 3 + a_{n-4}x^{n-4} + ... + a_1x + a_0,$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników rzeczywistych $a_0, a_1, ..., a_{n-3}$ jest różny od zera, ma mniej niż n pierwiastków rzeczywistych.

26. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x + y$ jest liczbą wymierną, to $W(x) + W(y)$ jest liczbą wymierną.