Bardo, październik 2019

IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

1. (Równanie Cauchy'ego)Twierdzenie 1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją spełniającą $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = ax$.

2. (Równanie Jensena) Znajdź wszystkie funkcje (ciągłe) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające

$$f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Wskazówka: Równanie Cauchy'ego

3. (Nierówność Cauchy'ego) Znajdź wszystkie ciągłe funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ oraz $f(x) \leq x$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Dwa komentarze (osłabienie warunku ciągłości w równaniu Cauchy'ego):

Twierdzenie 2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie Cauchy'ego. Załóżmy ponadto, że istnieje przedział $[c, d] \subset \mathbb{R}$, $c < d$ taki, że f jest ograniczona z dołu na $[c, d]$. Wówczas istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = ax$. Czy wiesz, dlaczego Twierdzenie 1 pociąga Twierdzenie 2?

Wniosek - zadanie. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie Cauchy'ego, oraz jest niemalejąca, tzn. $f(x) \leq f(y)$ dla wszystkich $x \leq y$. Wówczas istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = ax$.

5. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające $f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$ (nie zakładamy nic o f).

6. (Linearyzacja) Znajdź funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozwiązującą równanie $f(x^2) - f(x) = 1$.

7. Znajdź funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozwiązującą równanie $f(x+1) = [f(x)]^2$

8. (Równanie postaci $f(\alpha(x)) = sf(x)$) Znajdź postać niezerowych rzeczywistych funkcji f spełniających $f\left(\frac{sx}{1+x}\right) = sf(x)$, $0 < s < 1$.

9. Udowodnij, że nie istnieje bijekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że $f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(n)f(m)$.

10. (*) Funkcja $\phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ jest podmultyplikatywna, tzn. $\phi(xy) \leq \phi(x)\phi(y)$. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \phi(x^n)^{1/n}$.
Wskazówka: Jeśli ciąg liczb rzeczywistych a_n spełnia warunek $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, to istnieje granica (być może niewłaściwa) ciągu a_n/n oraz $\lim_n a_n/n = \inf_n a_n/n$. Czy potrafisz to udowodnić?

11. (Wniosek z Twierdzenia Banacha o mieszaniu herbaty) Załóżmy, że odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest takie, że dla pewnego n odwzorowanie $f^{(n)}$ (n-krotne złożenie) ma jeden punkt stały, tzn taki $x \in \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(x) = x$. Pokaż, że wówczas funkcja f też ma punkt stały.