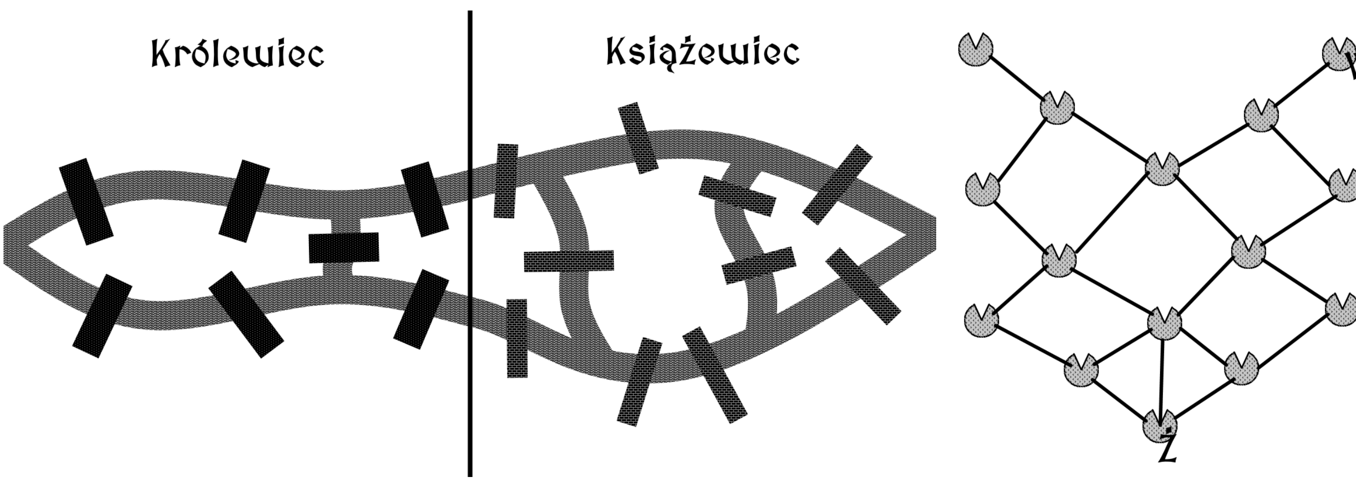
Struktury Matematyczne, Kombinatoryka

Jakub Kamiński, Dominik Gdesz
Bardo, 30.10.2019

1 Grafy

Zadanie 1. Czy po Królewcu da się przespacerować w taki sposób, żeby po każdym moście przejść *dokładnie* raz? A po Książewcu? A co, gdybyśmy chcieli wrócić do tego samego miejsca, w którym zaczęliśmy?



Rysunek 1: Mapa Królewca, Książęwca, oraz stawu.

Zadanie 2. Żaba (Ż) i ważka (W) przemieszczają się na przemian, przy czym pierwszy ruch wykonuje żaba. W jednym ruchu każda z nich może przemieścić się ze swojego liścia na liść sąsiedni (połączony kreską). Czy żaba może złapać ważkę?

Zadanie 3. W turnieju karate zawodnicy osiągnęli tak doskonałą równowagę, że każdy z nich wygrał tyle samo pojedynków co przegrał. Nie każdy zawodnik walczył z każdym, ale żaden zawodnik nie walczył z innym dwukrotnie . Wiadomo za to, że zeszłoroczny zwycięzca zdążył zawalczyć ze wszystkimi.
Spektakularną sekwencją nazywamy taki ciąg walk, w którym zwycięzca i-tej walki jest przegranym w walce numer $i + 1$ oraz żadna walka się nie powtarza. Czy jest możliwe odtworzenie nagrań z wszystkich pojedynków w telewizji, ale w kolejności tworzącej *spektakularną sekwencję*?

Zadanie 4. W turnieju judo pojedynki odbywały się na dwóch matach - twardej i miękkiej. Ze względu na bardzo jednorodne plany treningowe, jeśli zawodnik A wygrał z B na macie twardej, to przegrał z nim na miękkiej i odwrotnie. Dodatkowo dla sprawiedliwości, jeśli jakaś para zawodników zdołała zawalczyć, to zawalczyła na obu matach po razie. Nie było remisów.
Czy da się teraz utworzyć *spektakularną sekwencję* zawierającą wszystkie walki, w której nie zdarzy się tak, że jeden zawodnik będzie uczestniczył w trzech kolejnych walkach, jeśli wiemy, że da się utworzyć jakąkolwiek?
A gdybyśmy wiedzieli, że każdy zawodnik walczył z co najmniej dwoma innymi?

Zadanie 5. W turnieju kung-fu brało udział $3n$ zawodników. Każdy zawodnik walczył z każdym innym, nie było remisów. Wiemy, że wśród każdych czterech zawodników A,B,C,D był jeden, który wygrał z wszystkimi pozostałymi lub przegrał z wszystkimi pozostałymi. Ile co najwyżej może istnieć różnych zbiorów zawodników {A,B,C} takich, że A wygrał z B, B wygrał z C i C wygrał z A? Sytuację, w której ta ilość jest maksymalna (oraz zachodzą poprzednie warunki) nazwiemy *zrównoważonym turniejem*, a każdy taki zbiór *trójką remisującą* .

Wskazówka: *Pokazać, że dwie trójki remisujące nie mogą mieć wspólnych zawodników.*

Zadanie 6. Odbył się zrównoważony turniej w którym wzięło udział $3n$ zawodników. *Cykliczną sekwencją* długości n nazwiemy spektakularną sekwencję złożoną z n-1 walk, do której dodajemy walkę między przegranym z walki ostatniej ze zwycięzcą pierwszej, którą wygrał ten pierwszy.

a) *(Zrobić przed przeczytaniem przykładu b)* Pokazać, że da się stworzyć *spektakularną sekwencję* w której każdy zawodnik zawalczy dokładnie dwa razy, oprócz dwóch, którzy zawalczą dokładnie raz.
b) *Zrobić przykład a przed przeczytaniem przypisu*[1]

Zadanie 7. Farmer ma wilka, kozę i kapustę. Ma też łódkę, w której oprócz niego mieści się tylko jedno z nich. Wilk zostawiony sam z kozą zje ją, podobnie koza zje kapustę. W jaki sposób farmer może przeprawić się przez rzekę, żeby nic nie zostało zjedzone?

Zadanie 8. Pewna grupa n przyjaciół często pożyczała od siebie pieniądze, więc w efekcie między każdymi dwoma osobami może istnieć jakiś dług (w jedną ze stron). Ile najmniej przelewów muszą wykonać, żeby uregulować wszystkie długi?

2 Relacje równoważności

Relacja na zbiorze X - podzbiór $R \subset X \times X$. Zazwyczaj oznaczamy $aRb \iff (a,b) \in R$ (przykładowo $a = b$, $a \sim b$, $a \circ b$)
Relacja równoważności - relacja $\sim$ spełniająca następujące warunki:

- *Zwrotność:* Dla każdego $x \in X$ zachodzi $x \sim x$
- *Symetryczność:* Dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $x \sim y \iff y \sim x$
- *Przechodniość:* Dla każdych $x, y, z \in X$ zachodzi $(x \sim y \land y \sim z) \implies x \sim z$

Relacja równoważności definiuje **klasy abstrakcji**, a klasy abstrakcji definiują relację równoważności.
Przykłady: równość, przystawanie modulo, podobieństwo figur, równoległość, spójne składowe

Zadanie 9. Weźmy zbiór X i rodzinę trójelementowych podzbiorów X, którą oznaczamy przez $Y \subset \mathcal{P}(X)$. Wiemy, że dla dowolnych dwóch elementów Y, ich iloczyn (przekrój) nie może mieć dokładnie jednego elementu. Ponadto co najwyżej 2 elementy X nie należą do żadnego zbioru z Y. Jaką moc może mieć Y, jeśli $|X| = n$?

[1] Czy da się stworzyć ranking trójek remisujących w taki sposób, że każda trójka remisująca wygrała z wszystkimi z gorszych miejsc? (mówimy, że trójka remisująca X wygrała z trójką remisującą Y, jeżeli wśród walk między zawodnikami z X i Y więcej niż połowa została wygrana przez zawodników z Y)?

3 Grupy (mniej więcej)

Zadanie 10. Na tablicy napisano pewne liczby. W jednym ruchu możemy zmazać liczby a i b, a na ich miejsce dopisać liczbę $ab-a-b+2$. Czy można ustalić jaka liczba zostanie na tablicy po ostatnim ruchu (jeśli tak - podać ją), jeżeli początkowe liczby to:
a) 98 dwójek, 2 trójki?
b) 95 dwójek, 5 trójek?
c) 95 dwójek, 4 trójki i piątka?

Grupa - zbiór X ze zdefiniowanym na nim działaniem $\circ$, piszemy $G = (X, \circ)$. Muszą być spełnione następujące warunki :

- *Wewnętrzność*: dla każdych $a, b \in X$ $a \circ b \in X$.
- *Łączność*: $\forall_{a,b,c \in X}\ a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
- *Element neutralny*: istnieje $e \in X$ takie, że $\forall_{a \in X}\ a \circ e = e \circ a = a$.
- *Odwracalność*: $\forall_{a \in X}\ \exists_{z \in X}\ a \circ z = z \circ a = e.$. Takie z nazywamy *elementem odwrotnym* a i oznaczamy $z = a^{-1}$.

Grupę z działaniem przemiennym nazywamy **abelową.**

Przykłady grup: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_{11}, +), (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$, grupa symetrii, $\mathcal{P}(X)$ z różnicą symetryczną $(\dot{-})$

Izomorfizm - (ogólnie) przekształcenie zachowujące pewne własności.

Zadanie 11. *(J. Wróblewski)* Czy istnieje funkcja, która złożona ze sobą 2019 razy daje funkcję $F(x) = \sqrt{x^2 + 2019}$ (w liczbach całkowitych dodatnich)?

Zadanie 12. Myśliwy złapał nieskończenie (przeliczalnie) wiele niedźwiedzi i powiedział im, że założy każdemu na głowę biały lub czarny kapelusz (tak, że każdy będzie widział wszystkie kapelusze oprócz własnego. Następnie niedźwiedzie będą musiały bez komunikowania się zgadywać kolor swojego kapelusza, a jeśli tylko skończona ilość z nich się pomyli, zostaną wypuszczone wolno. Niedźwiedzie mają teraz czas się namyślić. Czy mogą się uwolnić, jeżeli założymy aksjomat wyboru?

Zadanie 13. W Grafii Abstrakckiej sportem narodowym jest Struktball. To bardzo specyficzna gra dla dwóch drużyn. Zgodnie z zasadami w grze może uczestniczyć dowolna liczba osób, pod warunkiem że obie drużyny mają tyle samo uczestników. Na terenie Grafii jest wiele różnych klubów struktballowych. Każdy klub zorganizował wewnętrzny turniej pojedynków pomiędzy członkami klubu w taki sposób, że każdy członek klubu grał w przynajmniej jednym meczu i każda para grała ze sobą tylko raz. Okazało się, że podczas każdego z turniejów niemożliwe było pokazanie meczy w telewizji w spektakularnej sekwencji (tj. w takiej sekwencji, że dokładnie jeden uczestnik n-tego meczu grał w meczu $n+1$-szym) od długości większej niż $n-2$.
Okazało się, że turnieje spotkały się z wielkim zainteresowaniem, więc postanowiono je ze sobą łączyć w większe zawody. Turnieje A i B łączono w taki sposób, że jeśli w turnieju A drużyna a_1 grała z drużyną a_2 i w turnieju B drużyna b_1 grała z drużyną b_2, to rozegrano mecz pomiędzy łączoną drużyną powstałą z zawodników drużyn a_1 i b_1 a drużyną powstałą z zawodników drużyn a_2 i b_2. Rozegrano tylko takie mecze. Po kolei łączono turnieje, aż ostatecznie doszło do turnieju, w którym uczestniczył każdy członek każdego z klubów. Wtedy okazało się, że w spektakularnej sekwencji można pokazać wszystkie mecze poza 313. Ile klubów najwięcej mogło być na początku?
Uwaga: Ze względu na specyficzne zasady Struktballu, zawodnik może grać w obydwu drużynach w jednym meczu.

4 Geometrie skończone

Zadanie 14. Ile najwyżej punktów można wybrać z siatki prostokątnej 4×6 tak, żeby nie było wśród nich czterech wyznaczających prostokąt równoległy do osi? A z siatki $k \times \binom{k}{2}$?

Zadanie 15. Na kartach do gry Dobble znajduje się pewna liczba symboli (taka sama dla każdej karty). Celem gry jest znajdowanie wspólnych symboli między kartami. Czy potrafisz skonstruować taką talię (mającą rozsądną liczbę kart) do tej gry, żeby każde dwie karty miały dokładnie jeden wspólny symbol? A gdybyśmy dodatkowo chcieli, żeby każde dwa symbole występowały razem na dokładnie jednej karcie?

Płaszczyzna skończona afiniczna - zbiór X (którego elementy nazywamy punktami) wraz z wyznaczonymi podzbiorami (które nazywamy prostymi), spełniający następujące warunki:

- Dla każdych dwóch różnych punktów, dokładnie jedna prosta przechodzi przez te punkty.
- Dla prostej l i punktu p nieleżącego na l istnieje dokładnie jedna prosta k taka, że $p \in k$ i $l \cap k = \emptyset$.
- Istnieje zbiór czterech punktów taki, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej.

Podobnie, **Płaszczyzna skończona rzutowa** spełnia następujące warunki:

- Dla każdych dwóch różnych punktów, dokładnie jedna prosta przechodzi przez te punkty.
- Każde dwie proste przecinają się w dokładnie jednym punkcie.
- Istnieje zbiór czterech punktów taki, że żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej.

Zadanie 16. Znaleźć 25 liczb całkowitych takich, że największy wspólny dzielnik dowolnych dwóch z nich jest liczbą pierwszą.

Zadanie 17. Ile najwyżej można wybrać wierzchołków 13-kąta foremnego tak, żeby żadna odległość między dwoma wybranymi wierzchołkami się nie powtórzyła?

Zadanie 18. Wybrano k wierzchołków n-kąta foremnego w taki sposób, że każda możliwa odległość między dwoma wierzchołkami występuje wśród nich dokładnie raz. Wyznaczyć n w zależności od k.