Bardo, październik 2019

IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Liczby podziałowe (Stirlinga) oraz wielomiany

Niech $k \le n$ będą liczbami naturalnymi. Oznaczmy przez $\left\{ n \atop k \right\}$ ilość sposobów podziału zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów. Te wielkości są nazywane *liczbami Stirlinga drugiego rodzaju.*

1. Zauważ, że $\left\{ n \atop 1 \right\} = \left\{ n \atop n \right\} = 1$, $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$. Oblicz $\left\{ 7 \atop 3 \right\}$.

2. Pokaż, że $\left\{ n \atop n-1 \right\} = \binom{n}{2}$ oraz $\left\{ n \atop 2 \right\} = 2^{n-1} - 1$.

3. Udowodnij, następujący wzór rekurencyjny $\left\{ n \atop k \right\} = k\left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$.

4. Udowodnij, następującą równość dla $n \ge m_1 + m_2$

$$\binom{m_1+m_2}{m_1}\left\{ n \atop m_1+m_2 \right\} = \sum_{i=0}^{n-(m_1+m_2)} \binom{n}{i+m_1}\left\{ i+m_1 \atop m_1 \right\}\left\{ n-i-m_1 \atop m_2 \right\}.$$

Wskazówka: zbiór n uczniów chcemy podzielić na m_1+m_2 grup, m_1 z tych grup dostanie rowery.

5. Dla każdej liczby $k \in \mathbb{N}$ definiujemy funkcję $A_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$A_k(m) = \frac{k! \cdot m!}{(k+m)!}\left\{ k+m \atop m \right\} = \binom{k+m}{k}^{-1}\left\{ k+m \atop m \right\}.$$

Zrób w poprzedniej równości podstawienie $\left\{ n \atop m \right\} = \frac{n!}{m!(n-m)!}A_{n-m}(m)$. Jaką własność funkcji $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ otrzymujemy stąd? Oblicz $A_0(m)$, $A_1(m)$, $A_2(m)$.

6. (*) Uzasadnij, że $A_k(m)$ jest wielomianem od m stopnia k.

Dla ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definiujemy funkcję tworzącą:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

7. Znajdź funkcję tworzącą dla ciągu $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ w postaci zwartej.

8. Wiadomo, że

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!}\left\{ n \atop m \right\} x^n = \frac{1}{m!}\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)^m .$$

Uzasadnij, że

$$\sum_{k \ge 0} \frac{1}{k!} A_k(m) x^k = \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots\right)^m .$$

9. Udowodnij, że $A_k(m)$ jest wielomianem od m stopnia k postaci:

$$A_k(m) = \frac{m^k}{2^k} + \frac{k(k-1)}{2^{k+1} \cdot 3} m^{k-1} + \ldots .$$

Materiały przygotował: Jakub Gismatullin.

Dla $r \in \mathbb{N}_{>0}$ przez $S_r(n,m)$ oznaczamy ilość wszystkich podziałów zbioru n-elementowego na m rozłącznych podzbiorów, każdy o mocy $\geq r$. Mamy

$$S_1(n,m) = \left\{ {n \atop m} \right\}$$

w poprzedniej notacji.

10. Zauważ, że $S_r(n,0) = 0$, $S_r(n,1) = 1$, $S_r(r \cdot m, m) = \frac{(r \cdot m)!}{r!^m \cdot m!}$ oraz $S_r(n,m) = 0$ dla $n < r \cdot m$.

11. Uzasadnij, następującą zależność rekurencyjną

$$S_r(n+1,k) = kS_r(n,k) + \binom{n}{r-1} S_r(n-r+1, k-1).$$

12. Dla $r, n, m_1, m_2 \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz $n \geq r(m_1 + m_2)$ udowodnij następującą równość

$$\binom{m_1+m_2}{m_1} S_r(n, m_1+m_2) = \sum_{i=0}^{n-r(m_1+m_2)} \binom{n}{i+rm_1} S_r(i+rm_1, m_1) S_r(n-i-rm_1, m_2).$$

13. W poprzedniej równości zrób podstawienie

$$S_r(n,m) = \frac{n!}{m! \cdot r!^m \cdot (n - r \cdot m)!} B_{n-r\cdot m}(r,m),$$

gdzie funkcja $B_k \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$B_k(r,m) = \frac{k! \cdot m! \cdot r!^m}{(k + r \cdot m)!} S_r(k + r \cdot m, m)$$

Zauważ, że $A_k(m) = B_k(1,m)$. Oblicz $B_0(r,m)$, $B_1(r,m)$ i $B_2(r,m)$ oraz znajdź regułę na B_k .

14. (*) Uzasadnij, że $B_k(r,m)$ jest wielomianem od m stopnia k.

15. Wiedząc, że

$$\sum_{n \geq r\cdot m} \frac{1}{n!} S_r(n,m) x^n = \frac{1}{m!} \left(\frac{x^r}{r!} + \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \cdots \right)^m,$$

uzasadnij, że

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} B_k(r,m) x^k = \left(1 + \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)} + \frac{x^3}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \ldots \right)^m.$$

16. Korzystając z poprzedniego zadania udowodnij, że

$$B_k(r,m) = \frac{m^k}{(r+1)^k} + \frac{k(k-1)r}{2(r+1)^k(r+2)} m^{k-1} + \cdots .$$