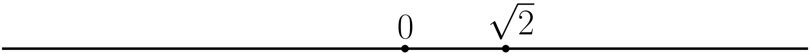
Rozmaitości

Damian Osajda (Wrocław)
UOOM 2019

30 października 2019

$\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$$



$\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^n$

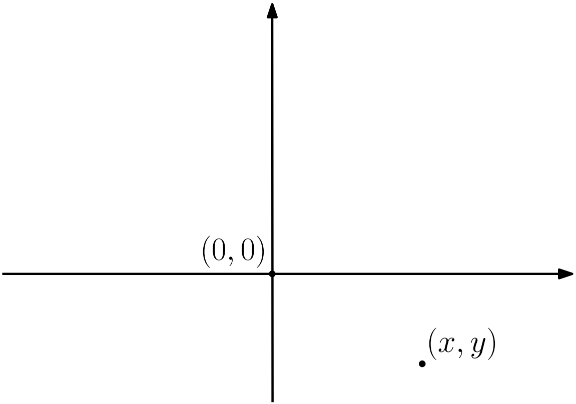
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Przypomnienie: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ - iloczyn kartezjański zbiorów A i B.

$\mathbb{R}^n$

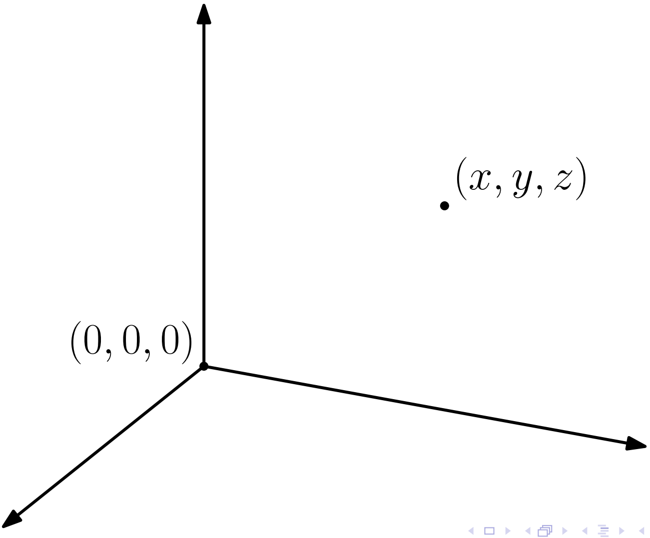
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Przypomnienie: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ - iloczyn kartezjański zbiorów A i B.



$\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



$\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \ \ razy}$$

$\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ razy}}$$

n-wymiarowa przestrzeń rzeczywista

$\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^0 = \{0\}$$

$\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ razy}}$$

$\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \;\; razy}$$

n-wymiarowa przestrzeń rzeczywista

Rozmaitość

Rozmaitość n-wymiarowa to przestrzeń wyglądająca lokalnie jak $\mathbb{R}^n$.

Rozmaitość

Rozmaitość n-wymiarowa to przestrzeń wyglądająca lokalnie jak $\mathbb{R}^n$.

“lokalnie” = w małym otoczeniu każdego punktu

Rozmaitość

Rozmaitość n-wymiarowa to przestrzeń wyglądająca lokalnie jak $\mathbb{R}^n$.

"lokalnie" = w małym otoczeniu każdego punktu

ang. *manifold* (geometria różniczkowa, topologia algebraiczna) lub *variety* (geometria algebraiczna, analiza zespolona)

Przykłady rozmaitości

Rozmaitość n-wymiarowa to przestrzeń wyglądająca lokalnie jak $\mathbb{R}^n$.

Przykłady rozmaitości

Rozmaitość n-wymiarowa to przestrzeń wyglądająca lokalnie jak $\mathbb{R}^n$.

Przykłady:

- $\mathbb{R}^n$ jest rozmaitością n-wymiarową;

Przykłady rozmaitości

Rozmaitość n-wymiarowa to przestrzeń wyglądająca lokalnie jak $\mathbb{R}^n$.

Przykłady:

- $\mathbb{R}^n$ jest rozmaitością n-wymiarową;
- suma rozłączna kopii $\mathbb{R}^n$ jest rozmaitością n-wymiarową, ale nie *spójną*;

Przykłady rozmaitości

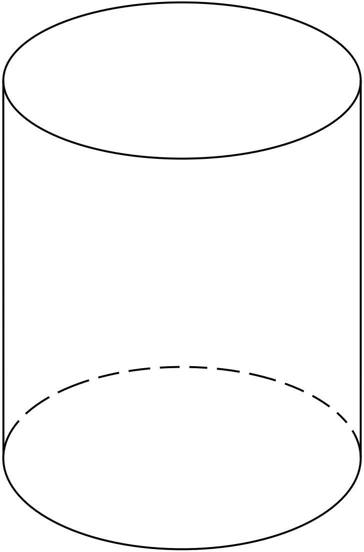
Rozmaitość n-wymiarowa to przestrzeń wyglądająca lokalnie jak $\mathbb{R}^n$.

Przykłady:

- $\mathbb{R}^n$ jest rozmaitością n-wymiarową;
- suma rozłączna kopii $\mathbb{R}^n$ jest rozmaitością n-wymiarową, ale nie *spójną*;
- *okrąg* (*sfera jednowymiarowa*) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ jest rozmaitością 1-wymiarową;

Przykłady rozmaitości cd.

- (nieograniczona) *tuba* $S^1 \times \mathbb{R}$ jest rozmaitością 2-wymiarową;



Przykłady rozmaitości cd.

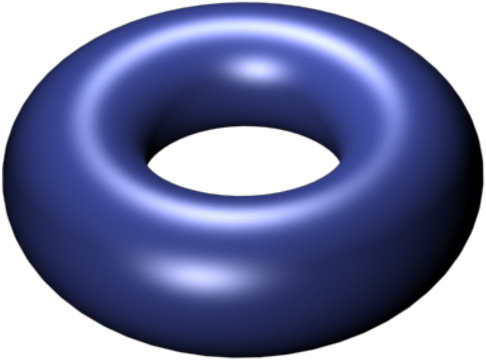
- (nieograniczona) *wstęga Möbiusa* jest rozmaitością 2-wymiarową;

Przykłady rozmaitości cd.

- *sfera* (*dwuwymiarowa*)
  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ jest rozmaitością 2-wymiarową;

Przykłady rozmaitości cd.

- *torus* (*dwuwymiarowy*) $T^2 = S^1 \times S^1$ jest rozmaitością 2-wymiarową;

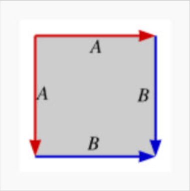


Przykłady rozmaitości cd.

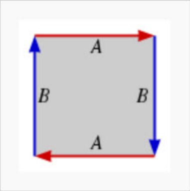
- *powierzchnia rodzaju* 2 (z dwoma dziurami)

Przykłady rozmaitości cd.

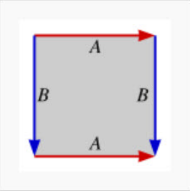
- powierzchnie cd.



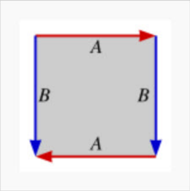
sphere



real projective plane



torus



Klein bottle

Przykłady rozmaitości cd.

- *butelka Kleina*

Przykłady rozmaitości cd.

- *sfera n-wymiarowa*, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \|^2 = 1\}$;

Przykłady rozmaitości cd.

- *sfera n-wymiarowa*, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \|^2 = 1\}$;
- *torus n-wymiarowy*, $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \ \ razy}$;

Przykłady rozmaitości cd.

- *sfera n-wymiarowa*, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \| x \|^2 = 1\}$;
- *torus n-wymiarowy*, $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \ \ razy}$;
- jeśli M^k, N^l sa rozmaitościami, odpowiednio, k- i l-wymiarowymi, to $M^k \times N^l$ jest rozmaitościa $(k + l)$-wymiarową;

Klasyfikacja rozmaitości

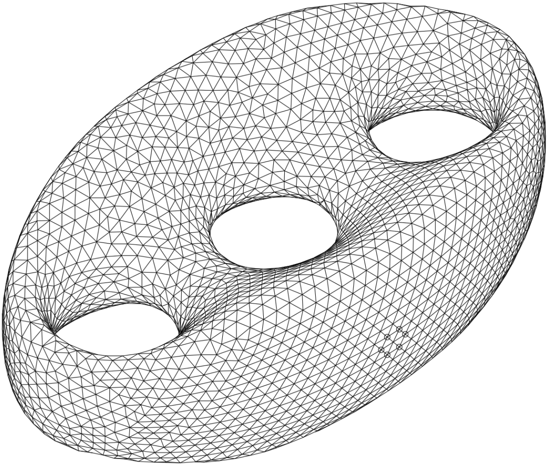
- Spójne rozmaitości 1-wymiarowe: $\mathbb{R}^1, S^1$.

Klasyfikacja rozmaitości

- Spójne rozmaitości 1-wymiarowe: $\mathbb{R}^1, S^1$.
- Spójne, zwarte, orientowalne rozmaitości 2-wymiarowe: spójne, zwarte, orientowalne powierzchnie rodzaju: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

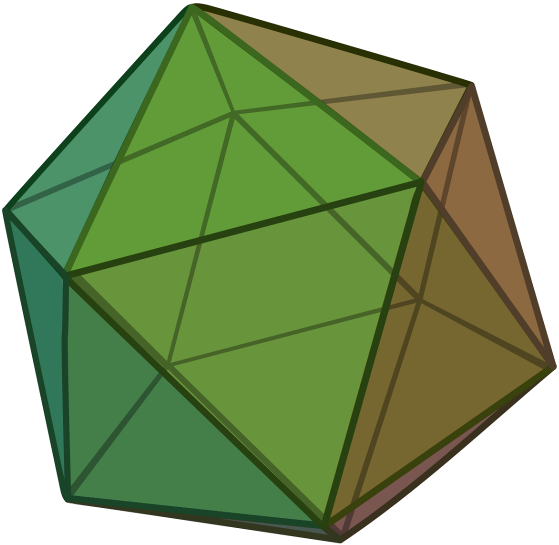
Triangulacja

Triangulacja rozmaitości.



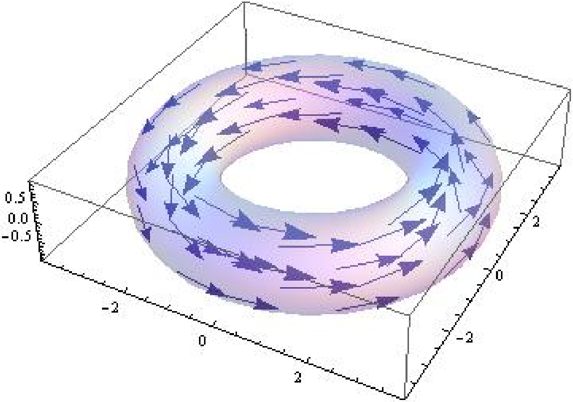
Triangulacja

Triangulacja rozmaitości.



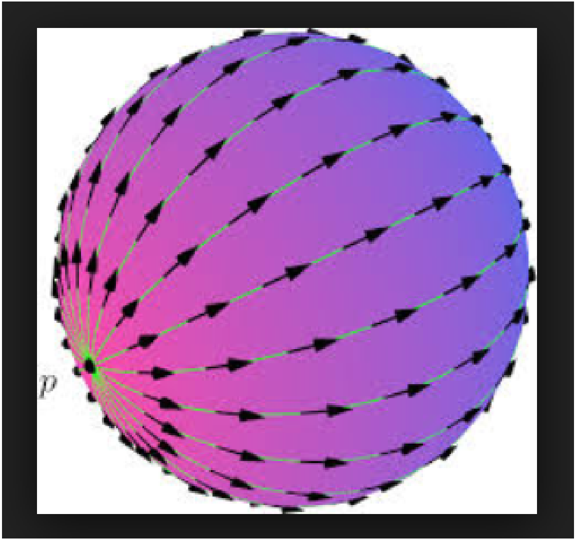
Pola wektorove

Pole wektorowe na powierzchni.



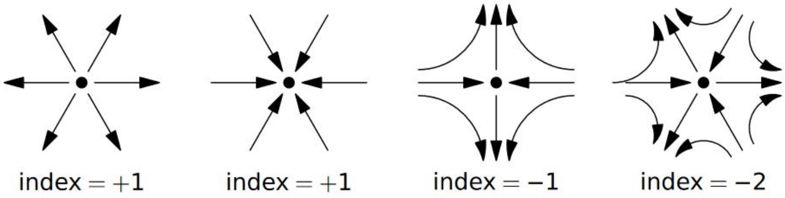
Pola wektorove

Pole wektorowe na powierzchni.



Pola wektorowe

Pole wektorowe na powierzchni.



...

...

...

...

...

...

...

...

...

...