Bardo, październik 2019

IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Dowodzenie

Zadania Rozgrzewkowe

1. Świadek nie był zastraszony lub też, jeśli Henry popełnił samobójstwo, to testament odnaleziono. Jeśli świadek był zastraszony, to Henry nie popełnił samobójstwa. Jeśli testament odnaleziono, to Henry popełnił samobójstwo. Jeśli Henry nie popełnił samobójstwa, to testament odnaleziono.

Czy Henry popełnił samobójstwo? Czy świadek był zastraszony? Czy testament odnaleziono?

2. W klasie znajduje się 2n chłopców i 2n dziewczyn. Każdy chłopiec przyjaźni się równo z połową dziewczyn i każda dziewczyna przyjaźni się równo z połową chłopaków (jeśli chłopiec przyjaźni się z dziewczyną, to ona przyjaźni sie z nim i odwrotnie). W trakcie balu odbędą się dwa tańce, na czas których chłopcy i dziewczyny dobierają się w pary. Nauczycielka rozważa takie scenariusze balu, że w żadnym z nich nie istnieje para, która powtórzy oba tańce. Ostatecznie postanowiła wybrać n takich scenariuszy. Czy możliwe jest, aby w każdym scenariuszu istniała taka dziewczyna, że każdy z chłopców z którymi ona tańczy w pewnym innym z tych n scenariuszy nie tańczył ani jednego tańca z dziewczyną, której by nie lubił?

Dowody

1. Wykaż, że $\sqrt{2}$ jest niewymierny

2. Wyznacz wszystkie pary liczb (a, b) takie, że spełnione jest

$$a + b = \sqrt{b + 2ab - a}$$

3. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych

4. Niech punkt O będzie środkiem okręgu o, a punkty B i C należą do tego okręgu. Wykaż że punkt A należy do o wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOC|$$

5. Wykaż, że każda liczba całkowita większa od 1 posiada jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze

Materiały przygotował: Dominik Gdesz.

Dowody - cz. dalsza

1. Niech A, B, C oznaczają proste na płaszczyźnie. Wykaż, że jeśli $A||B$ i $A||C$, to $B||C$.

2. Wyznacz, ile jest szóstek (a, b, c, d, e, f) liczb całkowitych dodatnich takich, że $a > b > c > d > e > f$ oraz $a + f = b + e = c + d = 30$?

3. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana posiada nieparzystą liczbę boków?

4. Na przyjęciu spotkało się szesć osob. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy dwoma swoimi znajomymi.

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n niepodzielnej przez 2 ani przez 5 istnieje taka liczba postaci 111...1, że jest ona podzielna przez n

6. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb nieujemnych i nie większych od 1, dla których spełniona jest równość

$$a + b + c = ab + bc + ca$$

Jednoznaczność rozkładu na czynniki pierwsze

1. Wykaż, że każda liczba całkowita większa od 1 posiada przynajmniej jeden dzielnik będący liczbą pierwszą

2. Wykaż, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić jako skończony iloczyn liczb pierwszych

3. Wykaż, że jeśli a jest liczbą naturalną i p jest liczbą pierwszą, to $NWD(a, p) = p$ lub $NWD(a, p) = 1$

4. (Lemat Bézout) Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b istnieją takie liczby całkowite m, n że

$$am + bn = NWD(a, b)$$

5. (Lemat Euklidesa) Wykaż że dla dowolnych libcz naturalnych a, b i liczby pierwszej p takiej, że $p \nmid a$ jesli $p \mid ab$, to $p \mid b$

6. Wykaż, że każda liczba całkowita większa od 1 posiada jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze