Bardo, październik 2019

IV UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Teoria Liczb - zadania

Zad.1. Pokaż, że

a) $5|2^{100}-3^{100}$ b) $5|2^{103}-3^{101}$ c) $5|2^{102}-3^{102}$.

*spróbujcie zrobić c) tak jak a)

Zad.2. Znajdź ostatnią cyfrę

a) 3^{211} b) $18 \cdot 1139 \cdot 45671$ c) $7^{34} \cdot 193022$ d) 2^{12323}

Zad.3. Rozwiąż kongruencje

a) $2x+2 \equiv 13\ (mod\ 7)$ b) $4x+1 \equiv 7\ (mod\ 5)$ c) $5x-3 \equiv 5\ (mod\ 8)$

Zad.4. Rozwiąż układy kongruencji

a) $\begin{cases} x \equiv 4\ (mod\ 5) \\ x \equiv 3\ (mod\ 6) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x \equiv 8\ (mod\ 9) \\ x \equiv 1\ (mod\ 4) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \equiv 2\ (mod\ 7) \\ xy \equiv 5\ (mod\ 7) \end{cases}$

Zad.5*. Pokaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, takich, że

$$p \equiv 5\ (mod\ 6)$$

Zad.6. Policz $NWD(x,y)$ jeżeli

a) $x=213, y=145$ b) $x=45, y=78 \cdot 27$ c*) $x=F_{n+2}, y=F_n, n>2$

Gdzie F_n jest n-tym wyrazem ciągu Fibonacciego ($F_1=F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$)

Zad.7. Pokaż, że dla każdego a

a) $a^{42} \equiv a^6\ (mod\ 7)$ b) $a^{15} \equiv a^7\ (mod\ 5)$ d) $13^{2a}+6 \equiv 0\ (mod\ 7)$ (II OM I etap)

Zad.8. **!!** Pokaż, że dla każdej liczby pierwszej p, dla każdego a i $k,l>0$, takich, że $k \equiv l\ (mod\ (p-1))$

$$a^k \equiv a^l\ (mod\ p)$$

Co z $k,l \leqslant 0$?

Zad.9. Znajdź resztę z dzielenia

a) $371^{37}\ mod\ 13$ b) $27^{23^3}\ mod\ 23$ c) $57^{21!}\ mod\ 17$
d) $13^{4^n}\ mod\ 7$ e*) $F_n^{F_{3n}+1}\ mod\ 3$

Zad.10. Pokaż, że dla kazdej liczby pierwszej p, dla każdych a,b

$$(a+b)^p \equiv a^p+b^p\ (mod\ p)$$

Zad.11*. Pokaż, że dla każdej liczby pierwszej p, dla każdego $a \perp p$

$$a^{p(p-1)} \equiv 1\ (mod\ p^2)$$

wskazówka: $(a-b)|(a^n-b^n)$

Zad.12*.(tw. Wilsona). Pokaż, że dla liczby pierwszej p zachodzi:

$$(p-1)! \equiv -1\ (mod\ p)$$

Materiały przygotował: Adam Morawski. Na podstawie zadań autorstwa Jarosława Wróblewskiego i Michała Śliwińskiego.