IV Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 26-30 października 2019

Liga zadaniowa - dzień 4.

16. Przedstaw wielomian $X^2Y^2 + Y^2Z^2 + X^2Z^2$ jako wielomian $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ dla $\sigma_1 = X + Y + Z$, $\sigma_2 = XY + YZ + XZ$, $\sigma_3 = XYZ$.

17. Wyznacz wszystkie liczby naturalne 4-cyfrowe takie, że są one równe sześcianowi sumy swoich cyfr.

18. Rozwiązać równanie $(x + 2)^4 - x^4 = y^3$ w liczbach całkowitych x, y.

19. Znajdź wszytkie takie trójki (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich, że suma dowolnych dwóch spośród nich jest podzielna przez trzecią.

20. Wiekowy pieseł siedzi w punkcie $(0, 0, 0)$ w $\mathbb{R}^3$ i zajada się Pringlesami. Kiedy już ma zjeść ostatni hiperboloidalny chrupek jego właścicielka Karen zabiera go mu sprzed nosa i zaczyna uciekać. Ponieważ pieseł ma swoje lata, ma ograniczone ruchy i może poruszać się tylko wzdłuż prostych równoległych do standardowych wersorów $e_1 = (0, 0, 1), e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (1, 0, 0)$ w cykliczny sposób, tzn. po ustaleniu kolejności w cyklu nie może go modyfikować, np. $e_3, e_2, e_1, e_3, e_2, e_1, \ldots$. Pokazać, że pieseł może gonić Karen tylko w określonych kierunkach, ściślej: po ustaleniu cyklu wyznaczającego podróż istnieją trzy proste w $\mathbb{R}^3$, które pieseł odwiedzi nieskończenie wiele razy (znajdź ich równania).