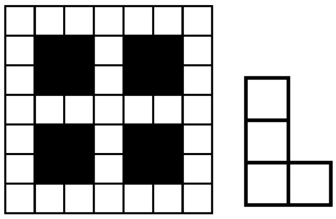
IV Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 26-30 października 2019

Liga zadaniowa - dzień 3.

11. Niech $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + 1$ będzie wielomianem o współczynnikach dodatnich oraz n pierwiastkach całkowitych. Udowodnij, że $W(2) \geq 3^n$.

12. Weźmy szachownicę o boku długości $3n+1$ z wyciętymi kwadratami 2×2, takimi że ich lewy górny róg znajduje się w $3i+2$ kolumnie oraz $3j+2$ rzędzie dla $i, j \in \mathbb{N}$ (jak na rysunku). Dla jakich wartości n opisaną powyżej figurę da się pokryć przy użyciu kolocków w kształcie L-tetramina (obrazek niżej)?
UWAGA: Klocki można odbijać symetrycznie i obracać.



Po lewej: Wygląd szachownicy dla $n = 2$, Po prawej: L-tetramino (no chyba widać)

13. Funkcja $f(x, y)$ spełnia warunki:
(a) $f(0, y) = y + 1$,
(b) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$,
(c) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$,
dla wszystkich całkowitych nieujemnych x, y. Wyznacz $f(4, 2019)$.

14. Na płaszczyźnie dane są trzy okręgi k_1, k_2, k_3. Okręgi k_2 i k_3 są styczne zewnętrznie w punkcie P, okręgi k_3 i k_1 - w punkcie Q, okręgi k_1 i k_2 - w punkcie R. Prosta PQ przecina okrąg k_1 jeszcze w punkcie S, a prosta PR - w punkcie T. Prosta SR przecina okrąg k_2 również w punkcie U, a prosta TQ przecina k_3 jeszcze w punkcie V. Udowodnić, że punkt P leży na prostej UV.

15. Kolorujemy każdy z punktów (3-wymiarowej) przestrzeni albo na niebiesko albo na zielono w dowolny sposób. Załóżmy, że każdy kwadrat jednostkowy ma co najmniej jeden wierzchołek zielony. Uzasadnić, iż istnieje kwadrat jednostkowy z co najmniej trzema wierzchołkami zielonymi.