# IV Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 26-30 października 2019

# Liga zadaniowa - dzień 2.

**6.** Ile wierzchołków, krawędzi, oraz $k$-wymiarowych ścian ($k = 2, 3, ..., 6$) ma 7-wymiarowa kostka?

**7.** Dany jest 7-wymiarowy hipersześcian o wymiarach $7\times7\times7\times7\times7\times7\times7$ podzielony na hipersześciany jednostkowe (kostki). 7-wymiarowy klocek tworzymy w następujący sposób: bierzemy jedną kostkę i oznaczamy ją jako startową, a następnie do jednej z jej hiperścian (będącej 6-wymiarowym hipersześcianem) doklejamy kostkę. Powtarzamy to dopóki mamy możliwość, przy czym nie można doklejać kostek do obydwu z równoległych hipeścian kostki startowej. Innymi słowy, gdyby kostka startowa miała środek w punkcie (0,0,0,0,0,0,0), doklejone kostki miałyby środki we wszystkich punktach mających wszystkie współrzędne 0, oprócz jednej będącej 1.

Czy da się nasz hipersześcian wypełnić takimi klockami (oczywiście możemy je obracać i odbijać)?

**8.** Dla każdej liczby naturalnej $n$ obliczamy sumę cyfr liczby $3n^2 + n + 1$. Znaleźć najmniejszą otrzymaną w ten sposób sumę.

**9.** Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny składający się z liczb całkowitych. Udowodnij, że można usunąć część wyrazów tego ciągu, tak aby pozostał nieskończony ciąg geometryczny.

**10.** Weźmy czworokąt wypukły $ABCD$. Proste $AC$ i $BD$ przecinają się w $P$, ponadto $\angle APD = 60\,\text{deg}$.

Niech $E, F, G, H$ oznaczają odpowiednio środki odcinków $AB, BC, CD, DA$. Znajdź największą liczbę całkowitą $k$, dla której

$$EG + 3HF \geq kd + (1-k)s$$

gdzie $s$ jest połową obwodu $ABCD$, a $d$ jest sumą długości jego przekątnych. Kiedy zachodzi równość?