Bardo, listopad 2018

III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Liga zadaniowa - dzień 3.

1. Pokaż, że w dowolnym zbiorze złożonym z dziesięciu liczb naturalnych mniejszych od 100, zawsze istnieją dwa różne podzbiory o tej samej sumie (niekoniecznie rozłączne).

2. Udowodnij, że jeżeli

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_3} = \cdots = x_n + \frac{1}{x_1}$$

to $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ lub $|x_1 x_2 \ldots x_n| = 1$.

3. Dana, jest funkcja $y = f(x)$ określona dla wszystkich liczb rzeczywistych. Wiedząc, że dla dowolnego x prawdziwa jest równość

$$2f(x) + f(1-x) = 3x^2,$$

wyznacz $f(5)$.

4. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina okrąg Ω w punkcie W ($W \neq A$) oraz przecina odcinek BC w punkcie D. Wykaż, że:

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AW}{WI}.$$

5. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dowolnej liczby nieparzystej a zachodzi zależność $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1$.