III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Liga zadaniowa - dzień 2.

Tutaj może wprowadzenie.

1. Pokazać, że dla liczb dodatnich a_i zachodzi

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big) \geq n^2.$$

2. Udowodnij, że nie można wpisać w tablicę 9×9 liczb od 1 do 81 tak, aby dla każdego $i = 1, ..., 9$ iloczyn liczb w i-tym rzędzie był równy iloczynowi liczb w i-tej kolumnie.

3. Ciąg a_n zadany jest w sposób następujący:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_{n+3} = \frac{1 + a_{n+1}a_{n+2}}{a_n}.$$

Udowodnij, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

4. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Niech dwusieczne kątów tego trójkąta przecinają się w O'. Niech E będzie środkiem tego łuku BC, który nie zawiera punktu A, okręgu opisanego na $\triangle ABC$. Pokaż, że

$$|EB| = |EO'| = |EC|.$$