

## III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

## Liga zadaniowa - dzień 1.

1. Znaleźć sumę współczynników przy nieparzystych potęgach  $x$  w wyrażeniu

$$(x^5 + x - 1)^{2018}$$

2. Czy na płaszczyźnie istnieją takie dwa okręgi rozłączne zewnętrznie i taki punkt, że dowolna poprowadzona przezeń prosta przecina przynajmniej jeden z tych okręgów?
3. Niech  $\alpha \in \mathbb{R}$  będzie taka, że pewne pięć kolejnych elementów nieskończonego ciągu  $\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha, \dots$  jest wymierne. Udowodnić, że wszystkie elementy tego ciągu są wymierne.
4. Udowodnić, że na płaszczyźnie nie istnieje trójkąt równoboczny, którego wierzchołki mają całkowite współrzędne.
  - (a) (Za dodatkowe punkty) Udowodnić, że jeżeli wszystkie wierzchołki  $n$ -kąta foremnego mają całkowite współrzędne, to  $n = 4$ .