Inwersja

Definicja. *Inwersją* względem okręgu c o środku O i promieniu r nazywamy przekształcenie płaszczyzny przypisujące punktowi P punkt P' leżący na półprostej OP i spełniający warunek: $OP \cdot OP' = r^2$. Inwersję względem okręgu c oznaczać będziemy przez I_c.

Uwaga. Powyższa definicja nie określa obrazu punktu O. Należy bądź przyjąć, że nie leży on w dziedzinie inwersji, bądź też uzupełnić płaszczyznę dodatkowym punktem ∞ i przyjąć $I_c(O) = \infty$, $I_c(\infty) = O$.

Konwencja: Obraz punktu A, P, ... przez inwersję będziemy oznaczać A', P', ...

Podstawowe własności

1. Zaobserwuj następujące własności inwersji I_c: punkty okręgu c przechodzą same na siebie; punkty leżące na zewnątrz okręgu przechodzą na punkty leżące wewnątrz okręgu, i odwrotnie; jeśli $I_c(P) = P'$, to $I_c(P') = P$; proste przechodzące przez środek okręgu c przeprowadzane są każda na siebie; okręgi współśrodkowe z c przeprowadzane są na okręgi współśrodkowe z c.
2. W Niech punkty A, B przechodzą na A', B' przy inwersji o środku w O. Udowodnij, że trójkąty OAB i $OB'A'$ są podobne.
3. Przypomnienie: uzasadnij, że zbiór punktów z których widać odcinek AB pod zadanym kątem α (czyli $\{P : \angle APB = \alpha\}$) jest sumą dwóch łuków okręgów.
4. Udowodnij, że przy inwersji o środku O obrazem prostej nieprzechodzącej przez O jest okrąg przechodzący przez O. (Wsk. Ustal na prostej punkt P; niech P' będzie jego obrazem. Wykaż, że dla dowolnego Q na prostej kąt $\angle OQ'P'$ jest stały, niezależny od Q.) Uzasadnij, że obrazem okręgu przechodzącego przez O jest prosta nieprzechodząca przez O.
5. Wykaż, że przy inwersji o środku O obrazem okręgu nieprzechodzącego przez O jest okrąg. (Wsk. Niech A będzie najbliższym O punktem na okręgu, B – najdalszym, zaś C – jeszcze jakimś innym. Wykaż, że $\angle B'C'A' = \pi/2$.)
6. Uzasadnij, że okręgi styczne (lub okrąg i prosta, styczne do siebie) przechodzą przy inwersji na parę okręgów stycznych, lub na okrąg i prostą – styczne do siebie, lub na parę równoległych prostych. (Wsk. Okręgi są styczne jeśli mają jeden punkt wspólny.)
7. Zauważ, że jeśli dwa okręgi przecinają się w dwóch punktach, to w obu przecinają się pod tym samym kątem.
8. Udowodnij, że okrąg prostopadły do okręgu c jest zachowywany przez inwersję względem c. Czy jest też odwrotnie?
9. Udowodnij, że jeśli przez punkt P i jego obraz $P' = I_c(P)$ poprowadzić dowolny okrąg, to okrąg ten będzie prostopadły do c.
10. Uzasadnij, że jeśli prosta ℓ przechodzi przez punkt P a nie przechodzi przez środek okręgu c, to istnieje okrąg styczny do ℓ w P i prostopadły do c.
11. Używając poprzednich czterech zadań wykaż, że inwersja zachowuje kąty.
12. Uzasadnij, że dla pary rozłącznych niewspółśrodkowych okręgów zawsze da się znaleźć trzeci, prostopadły do nich obu. (Wsk. Szukaj punktu, z którego styczne do tych okręgów mają równe długości; szukaj go na prostej łączącej środki tych okręgów. Możesz użyć zasady Darboux lub tw. Pitagorasa.)
13. Udowodnij, że parę rozłącznych okręgów można przez inwersję przekształcić na parę okręgów współśrodkowych. (Wsk. Weź punkt przecięcia prostej łączącej środki tych okręgów z okręgiem prostopadłym do nich obu. Wykonaj inwersję o środku w tym punkcie.)
14. Niech okrąg c o środku O przecina okrąg o średnicy OP w punktach B i C. Uzasadnij, że punkt przecięcia prostej BC i prostej OP jest obrazem P przez inwersję względem c.

15. Niech prosta ℓ przechodząca przez P ale omijająca środek O okręgu c przecina c w punktach A i B; niech A^* i B^* będą symetryczne do A i B względem prostej OP. Wykaż, że punkt Q przecięcia prostych AB^* i BA^* jest obrazem P przez inwersję względem c. (Wsk. Na czworokątach $ABQO$ i A^*B^*QO można opisać okręgi.)

Zastosowania

1. Między łuk AB pewnego okręgu a jego cięciwę AB wpisujemy wszystkie możliwe pary okręgów stycznych. Znajdź miejsce geometryczne punktów styczności takich par.

2. Między łuk AB a cięciwę AB pewnego okręgu wpisujemy wszystkie możliwe pary przecinających się okręgów; dla każdej pary prowadzimy prostą przez jej punkty przecięcia. Udowodnij, że proste te wszystkie przechodzą przez jeden punkt.

3. Znajdź miejsce geometryczne punktów styczości par okręgów stycznych do ramion danego kąta w danych punktach A, B.