Bardo, listopad 2018

III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Niezmienniki...

1. Bierzemy liczbę 2018!. Obliczamy sumę jej cyfr, następnie obliczamy sumę cyfr powstałej liczby, i tak dalej, aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Jaka to liczba?

2. Na każdym polu szachownicy 11x11 leży moneta. Każdą monetę przesuwamy raz, na dowolne sąsiadujące z nią pole. Pokaż, że po tej operacji przynajmniej jedno pole stanie się puste.

3. Na tablicy zapisanych jest 10 znaków $+$ i 15 znaków $-$. W jednym ruchu ścieramy dwa dowolne znaki i dopisujemy $+$, jeżeli starte znaki były identyczne i $-$, jeżeli były różne. Jaki znak zostanie na tablicy po 24 ruchach?

4. Przy okrągłym stole siedzi 14 rycerzy. Na początku jeden z nich ma 14 złotych monet. W jednym ruchu rycerz, który posiada przynajmniej dwie monety, może obydwu swoim sąsiadom po jednej monecie. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie każdy rycerz będzie miał po jednej monecie?

5. Przy innym okrągłym stole siedzi innych 14 rycerzy. Tym razem wszyscy zaczynają z jedną monetą. W jednym ruchu jeden z rycerzy przekazuje jedną monetę swojemu sąsiadowi z lewej, a drugi - sąsiadowi z prawej. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie jeden rycerz będzie miał 14 monet?

6. Na pewnej wyspie żyje 13 żółtych, 15 zielonych i 17 czerwonych kameleonów. Kiedy spotkają się dwa kameleony różnego koloru, obydwa zmieniają kolor na trzeci. Czy może się zdarzyć, że w pewnym momencie wszystkie kameleony będą miały ten sam kolor?

7. Na tablicy zapisano liczby $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2018}$. W jednym ruchu zmazujemy dwie liczby - a, b - i zastępujemy je liczbą $a + b + ab$. Jaką liczbę możemy otrzymać po 2017 ruchach?

8. Na płaszczyźnie dane jest $2n$ punktów takich, że żadne trzy nie są współliniowe. Pokaż, że można połączyć je w pary odcinkami tak, żeby żadne dwa z nich się nie krzyżowały.

9. Dane są liczby 0, 1 i $\sqrt{2}$. W jednym ruchu możemy dodać do jednej z nich różnicę dwóch pozostałych pomnożoną przez dowolną liczbę wymierną. Czy w skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać liczby 0, 2 i $\sqrt{2}$ (w dowolnej kolejności)? (Wskazówka: wszystkie możliwe do otrzymania liczby można zapisać jako $a + b\sqrt{2}$, dla pewnych $a, b \in \mathbb{Q}$ - zatem można je jednoznacznie oznaczyć parą (a, b)).

10. (**Lemat Spernera**) Z 16 przystających trójkątów równobocznych układamy jeden duży trójkąt. Następnie każdy węzeł powstałej siatki trójkątów oznaczamy liczbą 1, 2 lub 3, tak, aby:

(a) w każdy wierzchołek dużego trójkąta była wpisana inna liczba, oraz

(b) jeżeli dwa wierzchołki dużego trójkąta są oznaczone liczbami a i b, to każdy węzeł na boku pomiędzy tymi wierzchołkami był oznaczony liczbą a lub b.

Pokaż, że istnieje mały trójkąt, którego wierzchołki oznaczone są liczbami 1, 2 i 3.

11. Dany jest zbiór liczba naturalnych od 1 do 100. Wybieramy z niego 51 liczb. Pokaż, że:
(a) Różnica pewnych dwóch z nich wynosi 1.
(b) Pewne dwie z nich są względnie pierwsze.
(c) Istnieją takie dwie z nich, że jedna jest podzielna przez drugą.

...i gry

1. Talia zawiera $2n$ kart z liczbami naturalnymi od 1 do $2n$. Rozdajemy karty po równo między dwóch graczy. W jednym ruchu gracz wykłada na stół wybraną kartę z ręki. Kiedy suma liczb na kartach wyłożonych przez wszystkich graczy będzie podzielna przez $2n + 1$, przegrywa gracz, który wyłożył ostatnią kartę. Kto ma strategię wygrywającą?

2. Dana jest liczba naturalna N, która jest iloczynem przynajmniej trzech różnych liczb pierwszych. W jednym ruchu gracz wypisuje złożony dzielnik N, który:
(a) nie jest równy N,
(b) nie jest względnie pierwszy z wypisanym już dzielnikiem,
(c) nie dzieli, ani nie jest podzielny przez wypisany już dzielnik.
Kto ma strategię wygrywającą?

3. Dana jest plansza 6x6 złożona z 36 kwadratów. Zaczynając od gracza pierwszego, w jednym ruchu gracz wybiera liczbę wymierną, której nie ma jeszcze na planszy i zapisuje ją w wybranym kwadracie. Kiedy cała plansza zostanie zapełniona, kwadrat z największą liczbą z każdego rzędu zostaje pomalowany na czarno, reszta pozostaje biała. Pierwszy gracz wygrywa wtedy i tylko wtedy, gdy może utworzyć ścieżkę z czarnych kwadratów z dowolnego pola w dolnym rzędzie do dowolnego pola w górnym rzędzie (ścieżka musi składać się z kwadratów sąsiadujących bokami lub narożnikami). Kto ma strategię wygrywającą?

4. Na tablicy zapisano liczbę 1000000 (milion). W jednym ruchu gracz zmazuje liczbę n, i zamiast niej zapisuje liczbę $n - 1$ lub $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Wygrywa ten, kto pierwszy zapisze liczbę 1. Kto ma strategię wygrywającą?

5. Dana jest liczba naturalna n oraz stół, na którym leży N kamyków, gdzie $N > n^2$. W jednym ruchu gracz może zabrać ze stołu $1, 2, \ldots, n - 1$ lub wielokrotność n kamyków. Wygrywa ten, kto zabierze ostatni kamyk. Kto ma strategię wygrywającą?

6. Na wierzchołkach pięciokąta foremnego stoi pięć identycznych, dwulitrowych wiader, które na początku są puste. W jednej kolejce pierwszy z graczy rozdziela litr wody między pięcioma wiadrami w dowolny sposób. Następnie drugi gracz opróżnia dwa wybrane, sąsiadujące ze sobą wiadra. Czy pierwszy gracz może doprowadzić do tego, że jedno z wiader się przepełni?

7. Dwóch graczy gra w podwójne szachy - zamiast pojedynczych ruchów gracze naprzemiennie wykonują po dwa. Pokaż, że gracz rozpoczynający może zawsze wygrać lub zremisować.

8. Dana jest nieskończona plansza złożona z kwadratów. Gracze na zmianę wpisują po jednym znaku na dowolnym pustym polu - pierwszy gracz kółko, drugi gracz krzyżyk. Pierwszy gracz wygra, jeżeli uda mu się napisać 11 sąsiadujących kółek w jednej linii (pionowo, poziomo lub na skos). Pokaż, że drugi gracz może nigdy nie dopuścić do wygranej przeciwnika.