Bardo, listopad 2018

III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Ciągi i rekurencje

1. Dla każdego $n \geq 1$ niech t_n oznacza liczbę ciągów długości n zbudowanych z symboli a, b, c, w których dwie samogłoski nie występują obok siebie. Znaleźć zależność rekurencyjną dla t_n.

2. Dla każdego $n \geq 1$ niech u_n oznacza liczbę sposobów ułożenia n identycznych kostek domina o wymiarach 2cm x 1cm na prostokącie o wymiarach 2cm x n cm. Znaleźć zależność rekurencyjną dla u_n.

3. Zrób poprzednie zadanie dla prostokąta 3cm $\times$ 3 cm.

4.

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 2a_n - 5 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 5 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$$

6. Znajdź wzór na ciąg Fibbonacciego

$$\begin{cases} f_1 = 1, \quad f_2 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} a_1 = 3, \quad a_2 = 0 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} a_1 = 3, \quad a_2 = -1 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 20 \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} a_1 = -2, \quad a_2 = -5 \\ a_{n+2} = -a_n \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} a_1 = 4\sqrt{2}, \quad a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - \sqrt{2}a_n \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} a_1 = -11\sqrt{2}, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -43 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} + 12a_n \end{cases}$$

Materiały przygotował: Marcin Preisner.

12. Znajdź ciągi u_n, t_n, jeśli:

$$\begin{cases} t_0 = 2, \quad u_0 = 3 \\ t_{n+1} = 6t_n + 4u_n \\ u_{n+1} = t_n + 3u_n. \end{cases}$$

Wskazówka: Wyprowadź rekurencję dla jednego ciągu.

13. (XV OM) Znajdź n-ty wyraz ciągu $a_1, a_2, ...$ w którym $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$ oraz dla każdego naturalnego k zachodzi

$$a_{k-3} - 3a_{k-2} + 3a_{k-1} - a_k = 0.$$

14. (LVIII OM) Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyznaczyć liczbę ciągów $(c_1, ..., c_n)$, gdzie $c_i \in \{0, ..., 9\}$, o następującej własności: w każdej trójce kolejnych wyrazów są co najmniej dwa wyrazy równe.

15. (LVI OM) Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych$a_1, a_2, ...$ spełniający równanie

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}$$

dla $n = 1, 2, ...$

16. (XXXV OM) Podać wzory wyraźne na n-ty wyraz ciągów określonych wzorami rekurencyjnymi:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n \\ a_1 = 14, b_1 = -6. \end{cases}$$

17. Jaka jest największa możliwa liczba obszarów wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

18. Mamy dane 2^n monet każda o innej wadze. Sortujemy je od najlżejszej do najcięższej w następujący sposób: najpierw dzielimy je na dwie równe części, każdą z tych części sortujemy tą samą metodą, a na koniec porównujemy dwie najcięższe monety z obu części, odkładamy najcięższą i powtarzamy. Ile maksymalnie ważeń potrzebujemy?

19. Rozwiąż rekurencję

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)a_n + 1 \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

20. Znajdź wzór na sumy: $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{nk}$, $\qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{nk}$.

21. Rozwiąż rekurencję

$$\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)a_n + 1 \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

22. (XLIII OM) Ciągi (x_n) i (y_n) są określone następująco: $x_0 = y_0 = 1$,

$$x_{n+2} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 2}{2y_n}.$$

Pokaż, że $y_n = x_{2^n - 1}$.

Wskazówka: Znajdź wzory ogólne. Niech $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ i znajdź układ rekurencji liniowych na a_n i b_n.