Bardo, listopad 2018

III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Ciągi i rekurencje

W poniższych zadaniach mamy do czynienia z ciągami, dla których niekoniecznie znamy natychmiast wzór ogólny, natomiast często widzimy łatwą zależność rekurencyjną, tzn. zależność pomiędzy wyrazem a wyrazem poprzednim (lub kilkoma wyrazami poprzednimi). Jednym z najsłynniejszych przykładów jest ciąg Fibbonacciego f_n, w ktorym pierwsze dwa wyrazy są równe 1, a każdy kolejny wyraz jest sumą dwóch poprzednich wyrazów (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...). Taką rekurencję zapisujemy:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \end{cases}$$

1. Jaka jest największa możliwa liczba obszarów wyznaczonych przez n prostych na płaszczyźnie?

2. Dla każdego $n \geq 1$ niech t_n oznacza liczbę ciągów długości n zbudowanych z symboli a, b, c, w których dwie samogłoski nie występują obok siebie. Znaleźć zależność rekurencyjną dla t_n.

3. Dla każdego $n \geq 1$ niech j_n oznacza liczbę sposobów ułożenia n identycznych kostek domina o wymiarach 2cm x 1cm na prostokącie o wymiarach 2cm x n cm. Znaleźć zależność rekurencyjną dla j_n.

Jak sobie radzić z takimi i podobnymi rekurencjami?

4.

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 7 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = -3a_n \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 2a_n - 5 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 5 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$$

8. Znajdź wzór na ciąg Fibbonacciego.

Materiały przygotował: Marcin Preisner.

9.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 0 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = -1 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 20 \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -5 \\ a_{n+2} = -a_n \end{cases}$$

12.

$$\begin{cases} a_1 = 4\sqrt{2} \\ a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - \sqrt{2}a_n \end{cases}$$

13.

$$\begin{cases} a_1 = -11\sqrt{2} \\ a_2 = -3 \\ a_3 = -43 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} + 12a_n \end{cases}$$

14. Znajdź ciągi u_n, t_n, jeśli:

$$\begin{cases} t_0 = 2 \\ u_0 = 3 \\ t_{n+1} = 6t_n + 4u_n \\ u_{n+1} = t_n + 3u_n. \end{cases}$$

Wskazówka: Wyprowadź rekurencję dla jednego ciągu.

15. Mamy dany ciąg implikacji

$$((...((p_1 \implies p_2) \implies p_3) \implies ...) \implies p_n)$$

Każde zdanie p_n jest prawdziwe lub fałszywe. Ile jest możliwych układów, dla których powyższy ciąg implikacji jest prawdziwy?

16. (LVIII OM) Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyznaczyć liczbę ciągów $(c_1, ..., c_n)$, gdzie $c_i \in \{0, ..., 9\}$, o następującej własności: w każdej trójce kolejnych wyrazów są co najmniej dwa wyrazy równe.

17. (LVI OM) Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych$a_1, a_2, ...$ spełniający równanie

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}$$

dla $n = 1, 2, ...$

Często jednak rekurencje nie są liniowe (czyli takie, jak w przykładach powyżej). W takich przypadkach często nie jesteśmy w ogóle w stanie znaleźć wzoru bezpośredniego na a_n. Trzeba sobie wtedy radzić inaczej.

Jednym z ważniejszych, choć bardzo intuicyjnych, twierdzeń jest następujące: jeśli ciąg jest rosnący (lub niemalejący) i ograniczony z góry, to ma granicę. Nie będziemy tutaj przytaczać dokładnej definicji granicy (bo nie ma potrzeby). Intuicyjnie - granicą ciągu a_n jest liczba g, jeśli wyrazy z dużymi indeksami n są bardzo bliskie g. Piszemy $\lim_{n\to\infty} = g$. Np. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Przez zbadanie zbieżności ciągu rozumiemy policzenie jego granicy lub wykazanie, że takowa nie istnieje.

19. Ciąg an spełnia $a_1 = \sqrt{2}$ oraz $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Udowodnij zbieżność ciągu a_n i oblicz jego granicę.

20. Zbadaj zbieżność ciągów

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}1 - \frac{1}{4}...1 - \frac{1}{2^n}, \qquad b_n = 1 + \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}...1 + \frac{1}{2^n}.$$

21. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = 5\frac{3a_n + 1}{2a_n + 6},$$

gdzie $a_1 \in (1, \infty)$.
Wskazówka: Należy wykazać ograniczoność i monotoniczność ciągu.

22. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4a_n + 1},$$

gdzie $a_1 \in (1, \infty)$.
Wskazówka: Należy rozłożyć ciąg na dwa podciągi ograniczone i monotoniczne.

23. Zbadać zbieżność ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n^2 + 1$$

dla przypadków: $a_1 \in (0, 2)$, $a_1 \in (2, \infty)$.

24. Uzasadnij, że jeśli $q > 1$ oraz $k \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0.$$

25. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że jeśli k i q są jak wyżej, to istnieje stała C, taka że dla wszystkich n zachodzi

$$n^k \leq Cq^n.$$